

Untersuchungen zur Stromdichteverteilung eines Lichtbogens im Magnetfeld

O. KLÜBER

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

(Z. Naturforsch. 24 a, 1473—1491 [1969]; eingegangen am 22. Juli 1969)

In a cylindrical arc without external magnetic field the radius of the discharge current is identical with that of the conductive plasma column. It is shown here that, in general, this is not the case in an arc with superposed magnetic field. Instead, the current is limited by the magnetic flux tube whose cross section is governed by that of the electrodes. This is still true if the radius of the conductive plasma column is much larger than that of the flux tube. In this case electromotive forces prevent radial expansion of the current carrying region and form a potential distribution in keeping with the current density distribution.

Die in herkömmlichen stationären Lichtbögen maximal erreichbaren Temperaturen werden im allgemeinen durch das Zusammenwirken mehrerer Verlustmechanismen bestimmt. Der zugleich günstigste und übersichtlichste Fall ist dabei der einer zylindersymmetrischen Bogensäule, in der die Energieabfuhr ausschließlich durch radiale Wärmeleitung gemäß

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + j_z E_z = 0$$

erfolgt. κ ist dabei die Wärmeleitfähigkeit des Plasmas und der Zusammenhang zwischen der axialen Stromdichte j_z und der axialen elektrischen Feldstärke E_z ist durch

$$j_z = \sigma E_z$$

gegeben. Da E_z in einer stationären und zylindersymmetrischen Bogensäule über Länge und Querschnitt konstant ist, wird die Verteilung der Stromdichte durch die der elektrischen Leitfähigkeit σ bestimmt. In dem Bereich des Bogens, in dem das Plasma vollständig ionisiert ist, sind σ und κ reine Temperaturfunktionen ($\sigma \sim T^{3/2}$, $\kappa \sim T^{5/2}$); im teilweise ionisierten Bereich hängen sie außerdem auch noch vom Druck p ab. Dieser kann als konstant betrachtet werden, wenn der vom Eigenmagnetfeld des Bogenstromes bewirkte radiale Druckanstieg vernachlässigbar ist, was in praktisch interessierenden Fällen meistens zutrifft.

Durch Diskussion der beiden obigen Gleichungen läßt sich zeigen, daß die Achsentemperatur eines solchen Lichtbogens nur von der pro cm Säulenlänge zugeführten Leistung $E_z I$ abhängt, wo I der Bogenstrom ist. Wegen der mit der Temperatur stark anwachsenden Wärmeleitungsverluste ($\kappa \sim T^{5/2}$) nimmt die Achsentemperatur mit steigender Leistungszufuhr

nur sehr langsam zu. Es liegt deshalb nahe, die Wärmeleitfähigkeit durch Überlagerung eines axialen Magnetfeldes zu reduzieren. Dabei ist ein merklicher Effekt zu erwarten, sobald die Gyrofrequenz der Elektronen größer als ihre Stoßfrequenz wird.

Die auf diese Weise in verschiedenen Bogenexperimenten erzielte Steigerung der Achsentemperatur blieb jedoch hinter den ursprünglichen Erwartungen zurück. Das hat folgenden Grund: In einem Lichtbogen mit überlagertem axialem Magnetfeld fließen diamagnetische Ringströme, die einen starken radialen Druckanstieg hervorrufen. Da diese Ringströme letzten Endes alle auf den Temperaturgradienten zurückgehen, nimmt der Druck in einem solchen Bogen mit der Temperatur und mit der Magnetfeldstärke zu. Für die Wärmeleitfähigkeit hat das zur Folge, daß bei einer bestimmten Temperatur mit wachsendem Magnetfeld nicht nur die Gyrofrequenz der Elektronen, sondern wegen der Druckerhöhung auch ihre Stoßfrequenz zunimmt. Der Steigerung der Achsentemperatur durch das Magnetfeld über die Reduzierung der Wärmeleitfähigkeit sind dadurch Grenzen gesetzt.

In dieser Arbeit wird nun gezeigt, daß der Einfluß eines Magnetfeldes auf die Achsentemperatur eines Lichtbogens sich nicht auf die Verminderung der Wärmeleitungsverluste beschränkt; das Magnetfeld bestimmt vielmehr auch die Stromdichteverteilung ganz einschneidend. Der Bogenstrom wird von derjenigen magnetischen Flußröhre begrenzt, deren Querschnitt am Ort der Elektroden mit dem Elektrodenquerschnitt zusammenfällt. Das ist auch dann der Fall, wenn die Umgebung der stromführenden Säule durch Wärmeleitung so stark aufgeheizt ist, daß auch dort leitfähiges Plasma existiert. Die Stromdichteverteilung ist somit nicht durch die Leit-



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

fähigkeitsverteilung gegeben. Das wird an Hand experimenteller Ergebnisse dargelegt und es wird gezeigt, wie diese Begrenzung des Stromquerschnittes durch das Magnetfeld zustande kommt.

1. Der Aufbau der Versuchsanordnung und die Eigenschaften des Plasmas

Der Lichtbogen, dessen Stromdichteverteilung hier untersucht wird, wurde von WULFF¹ entwickelt und beruht auf folgendem Konzept: Im Inneren einer langen zylindrischen Magnetfeldspule soll eine Plasmasäule erzeugt werden, die von der Wand des Entladungsrohres durch eine Neutralgasschicht erheblicher Dicke getrennt ist. Nach Überlegungen von ALFVÉN² ist zu erwarten, daß eine solche Konfiguration wesentlich stabiler als ein vom Vakuum umgebenes Plasma ist, und es sollten sich trotz des Wärmeaustausches mit dem Neutralgas hohe Temperaturen erreichen lassen.

Der Geometrie der Anordnung liegt folgende Überlegung zugrunde: Es ist anzunehmen, daß der Entladungsstrom etwa parallel zu den magnetischen Feldlinien des Spulenfeldes fließt und daß der Plasmaradius durch den Stromradius festgelegt ist. Würde man die Elektroden im Inneren der Feldspule im Bereich homogenen Feldes anbringen, so hätte man als Elektrodenradius den gewünschten Plasmaradius von etwa 1 cm zu wählen. Bei Entladungsstromstärken von einigen kA ist dann mit erheblicher Elektrodenzerstäubung, also starker Verunreinigung des Plasmas zu rechnen. Wegen der zu erwartenden Führung des Entladungsstromes durch die Feldlinien des Spulenfeldes kann man die Elektroden aber auch außerhalb der Feldspule anbringen, also in einem Gebiet, in dem die magnetischen Flußröhren sich stark aufweiten, und dann wesentlich größere Elektrodenquerschnitte verwenden. Mit der Aufweitung der Flußröhren ist allerdings auch eine Abnahme der Feldstärke verbunden; für größere Abstände von den Spulenden ist keine wirkame Führung des Entladungsstromes zu erwarten. Deswegen sind an die Elektroden Glastrichter angesetzt, die mit derjenigen magnetischen Flußröhre zusammenfallen, die die Elektroden tangiert. Sie

sind durch ein zylindrisches Glasrohr miteinander verbunden, dessen Radius knapp unter dem Innenradius der Feldspule (4 cm) liegt. Die so entstehende Anordnung ist in Abb. 1 wiedergegeben.

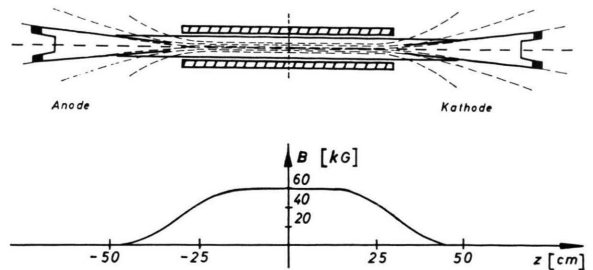


Abb. 1. Oben: Entladungsrohr, Feldspule und Magnetfeldlinien im Längsschnitt. Unten: Verlauf von B auf der Achse der Anordnung als Funktion von z . Im folgenden ist der Nullpunkt des Koordinatensystems stets dadurch festgelegt, daß die Ebene $z=0$ die Anordnung halbiert. Als positive z -Richtung wird die konventionelle Stromrichtung gewählt: Kathode bei $z > 0$, Anode bei $z < 0$.

Das Experiment wird kurzzeitig stationär betrieben. Als Energiespeicher für die Ströme durch Entladungsrohr und Feldspule werden Kondensatorbatterien verwendet. Beide Ströme werden kurzzeitig konstant gehalten, der Bogenstrom für maximal 1,4 msec, der Spulenstrom für 2 msec. Die Schaltungen, mit denen sich das erreichen läßt, wurden bereits an anderer Stelle³ beschrieben. Der Arbeitsbereich ist $2 \text{ kA} < I < 5 \text{ kA}$ für den Entladungsstrom und $30 \text{ kG} < B < 60 \text{ kG}$ für das Spulenfeld. Bei diesen Strömen und Magnetfeldern wird im Innenraum der Feldspule eine zylindrische Plasmasäule von etwas über 1 cm Radius erzeugt, deren radiale Temperaturverteilung stationär ist und sich im Bereich homogenen Magnetfeldes (etwa 5/6 der Länge der Spule) nicht mit der Längs-(z -)Koordinate ändert. Dieser Bereich wird im folgenden als der Mittelteil der Entladung bezeichnet. Für den Druckaufbau in diesem Mittelteil ergibt sich auf Grund eingehender Untersuchungen^{1, 3, 4} folgendes Bild:

In dem mit Helium bei einem Druck von $5 \cdot 10^{-3}$ at gefüllten Entladungsrohr herrscht während der Bogenbrenndauer im Neutralgasmantel etwa der 10-fache Druck, also $5 \cdot 10^{-2}$ at. Der Druck auf der Achse erreicht Werte von über 1 at (Elektronendichte $1,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, Maximaltemperatur $400\,000^\circ \text{K}$).

Sonderdruckanforderungen erbeten an Dr. O. KLÜBER, Institut für Plasmaphysik GmbH, D-8046 Garching bei München.

¹ H. WULFF, Proc. Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vol. I, 829, Belgrad 1965.

² H. ALFVÉN et al., Nucl. Fusion, Suppl. Part I, 33 [1962].

³ O. KLÜBER, Z. Naturforsch. **22a**, 1599 [1967].

⁴ P. H. GRASSMANN, Z. Naturforsch. **23a**, 2, 251 [1968].

Diese Druckdifferenz zwischen Achse und Rand der Plasmasäule wird nur zu einem geringen Teil vom Pinch-Effekt (Kompression des Plasmas durch das Eigenmagnetfeld des Entladungsstromes), hauptsächlich vielmehr von diamagnetischen Ringströmen im Plasma hervorgerufen. Die Ursachen dieser Ringströme sind die ambipolare Diffusion⁵ und der Nernst-Effekt^{3, 4}, wobei letzterer den Druckaufbau im vollständig doppelt ionisierten Kern der Plasmasäule praktisch allein bestimmt. Für ein doppelt ionisiertes He-Plasma wirkt sich der Nernst-Effekt gerade so aus, daß Druck und Temperatur zueinander proportional sind, die Dichten der Elektronen und Ionen also über den Radius konstant sind^{3, 4}.

Mit abnehmendem Magnetfeld nimmt auch der von diesen beiden Effekten bewirkte radiale Druckanstieg ab, so daß der Druck auf der Achse des Entladungsrohres unter den Spulenenden und erst recht vor den Elektroden wesentlich geringer als im Mittelteil ist. Infolgedessen strömt das Plasma aus dem Mittelteil zu beiden Trichtern hin axial ab. Die Strömungsgeschwindigkeit erreicht an den Spulenenden Werte von 10^6 cm sec⁻¹. Die Plasmadichte im Mittelteil würde infolge dieser Strömung während der Bogenbrenndauer erheblich abnehmen, wenn die verlorengehende Materie nicht durch einen radialen Zustrom ersetzt würde. Die Existenz einer solchen radialen Einströmung im Mittelteil folgt einmal aus der beobachteten zeitlichen Konstanz der Dichte; zum anderen ist sie auch direkt über die von ihr hervorgerufene Relaxation der Ionisation⁶ nachgewiesen.

2. Messung der Potentialverteilung

Die Messungen von Druck und Temperatur im Plasma ergaben, daß beide im Mittelteil, also im Bereich homogenen Spulenfeldes, von der z - (Längs-) Koordinate nicht abhängen. Deswegen erwartet man zunächst, daß die Plasmasäule auch in bezug auf alle anderen Größen zylindersymmetrisch ist. Insbesondere sollte dann auch die elektrische Feldstärke \mathbf{E} nicht von z abhängen. Da das Magnetfeld stationär ist, gilt $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, und somit $\partial E_z / \partial r = \partial E_r / \partial z$. Im Fall der Zylindersymmetrie verschwindet $\partial E_r / \partial z$, woraus dann $\partial E_z / \partial r = 0$ folgt. E_z ist also über den Querschnitt der Plasmasäule konstant, so daß die

Verteilung der axialen Stromdichte $j_z = \sigma E_z$ durch die Leitfähigkeit σ bestimmt wird. Aus dem Entladungsstrom

$$I = \int_0^{r_0} j_z 2 \pi r dr = \int_0^{r_0} \sigma E_z 2 \pi r dr \quad (1)$$

läßt sich dann E_z bestimmen, wenn der Leitfähigkeitsverlauf $\sigma(r)$ bekannt ist. Dabei ist der Leitfähigkeitsradius r_0 nach Gl. (1) dadurch definiert, daß die Beiträge zum Integral für $r > r_0$ vernachlässigbar sind.

Bei den im hier untersuchten Plasma herrschenden Dichteverhältnissen wird die Leitfähigkeit noch bei sehr kleinem Ionisationsgrad praktisch allein durch die Elektron-Ion-Stöße bestimmt, so daß auch bei schwacher Ionisation noch $\sigma \sim T^{3/2}$ gilt. Als untere Grenze der Gültigkeit des $T^{3/2}$ -Gesetzes können wir $14\,000^\circ\text{K}$ setzen, wie an anderer Stelle⁷ gezeigt wurde. Erst bei noch kleineren Temperaturen dominieren die Stöße zwischen Elektronen und Neutralatomen. Die Leitfähigkeit nimmt dann mit der Elektronendichte, wegen der schwachen Ionisation also sehr rasch mit der Temperatur ab, so daß wir für $T < 14\,000^\circ\text{K}$ $\sigma = 0$ setzen dürfen. Als Leitfähigkeitsradius ist somit der Radius anzusehen, an dem die Temperatur $T_0 = 14\,000^\circ\text{K}$ herrscht. Leitfähigkeitsradius r_0 und Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r)$ lassen sich somit auf einfache Weise aus der Temperaturverteilung bestimmen.

Die Auswertung radialer Temperaturprofile, die im Mittelteil bei Bogenströmen zwischen 2 und 4 kA und Magnetfeldern zwischen 30 und 60 kG aufgenommen wurden, lieferte unter der Annahme $E_z = \text{const}$ Werte zwischen 4 und 6 V/cm für E_z im Mittelteil. Wesentlich abweichende Werte ergaben sich aber bei direkter Messung des Spannungsabfalls an der frei brennenden Plasmasäule mit Hilfe von Potentialsonden, nämlich auf der Achse Werte bis über 10 V/cm, am Rand Werte von etwa 1 V/cm. E_z ist demnach keineswegs über den Querschnitt der Plasmasäule konstant, sondern fällt von der Achse zum Rand stark ab. Ein typisches Beispiel für eine gemessene Potentialverteilung ist in Abb. 2 wiedergegeben. Die in dieser Abbildung dargestellte Anordnung ist mit der in Abb. 1 identisch; der Übersichtlichkeit halber wurde aber der radiale Maßstab stark gedehnt. Die Potentialsonden, die den Spannungsabfall am Rand der Plasmasäule messen, wer-

⁵ R. WIENECKE, Z. Naturforsch. **18a**, 11, 1151 [1963].

⁶ K. BERGSTEDT, Z. Naturforsch. **24a**, 3, 299 [1969].

⁷ O. KLÜBER, Institut für Plasmaphysik, Garching, Bericht Nr. 3/48.

den radial, die Sonden, die den Spannungsabfall auf der Achse messen, werden axial eingeführt. Mit einer solchen Anordnung lassen sich Störungen der Entladung vermeiden. Wir werden darauf noch zurückkommen, uns zunächst aber den Meßergebnissen zuwenden.

Nach Abb. 2 ist der Spannungsabfall auf der Achse der frei brennenden Plasmasäule um den Faktor 11 größer als am Rand. Dieses Verhältnis ist für alle Messungen typisch; es lag im oben angegebenen Variationsbereich für Bogenstrom und Ma-

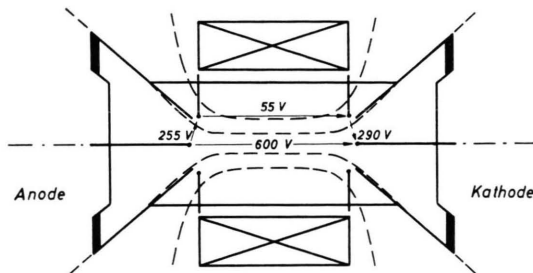


Abb. 2. Dieses Bild stellt die gleiche Apparatur dar wie Abb. 1; zur besseren Übersicht wurde aber der radiale Maßstab stark gedehnt. Die Abb. zeigt die Anordnung der Potentialsonden und ein typisches Meßergebnis. Dabei geben die Pfeile die Richtung an, in der das Potential abnimmt.

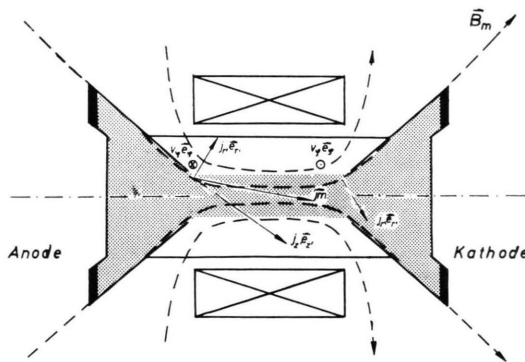


Abb. 3. Entladungsrohr, Feldspule und Magnetfeldlinien im maßstabsverzerrten Längsschnitt. Die punktierte Fläche bezeichnet schematisch die leitfähige Plasmasäule. $\mathbf{B}_m = B_r \mathbf{e}_r + B_z \mathbf{e}_z$ ist das meridionale Magnetfeld, das von der Feldspule (und von den Ringströmen im Plasma) erzeugt wird. Die Feldlinien des Gesamtmagnetfeldes $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + B_\phi \mathbf{e}_\phi$ liegen nicht in der Zeichenebene. Entsprechendes gilt für die Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}_m + j_\phi \mathbf{e}_\phi$. Unter Verwendung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_z' = \mathbf{B}_m/B_m$ und $\mathbf{e}_r' = \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z'$ gilt $\mathbf{j}_m = j_r \mathbf{e}_r' + j_z \mathbf{e}_z'$.

gnetfeld zwischen 9 und 12. Aus Spannungsabfall und axialem Sondenabstand erhält man auf der Achse mittlere Werte für E_z zwischen 8 und 12 V/cm, am Rand der Plasmasäule Werte zwischen 0,9 und 1,3

V/cm. Die unter der als unzutreffend erwiesenen Annahme $\partial E_z / \partial r = 0$ nach Gl. (1) berechneten Werte sind jeweils etwa die Mittelwerte aus $E_z(r=0)$ und $E_z(r=r_0)$. Um nachzuprüfen, wie E_z von z abhängt, wurde der axiale Abstand der Sonden verringert. Er beträgt in Abb. 2 65 cm auf der Achse, 60 cm am Rand der Plasmasäule. Verkürzt man am Rand den axialen Abstand auf 40 cm, also auf die Länge des homogenen Bereiches des Magnetfeldes, so nimmt der Spannungsabfall proportional zum Abstand, also auf $2/3$ ab. Eine Verlängerung der axialen Sonden führte zu erheblichen Störungen der Entladung. Aus solchen Messungen ließ sich daher nichts entnehmen.

Abbildung 2 ist auch insofern typisch für alle Messungen, als die radialen Spannungsabfälle an den Enden der Plasmasäule dem Betrag nach etwa gleich groß sind. Der Abstand der radialen Sonden von der Achse beträgt 1,5 cm (er fällt etwa mit dem Radius r_0 der leitfähigen Plasmasäule zusammen). Daraus ergeben sich für E_r Mittelwerte von fast 200 V/cm. Da E_r auf der Achse selbst verschwindet, müssen die Maximalwerte jedenfalls noch größer sein.

Bevor wir uns der Frage zuwenden, wie solche Potentialverteilungen zustande kommen, wollen wir noch zum Meßverfahren selbst einiges nachtragen.

Die Anwendbarkeit und Zuverlässigkeit dieses Verfahrens wurde von MÜLLER und FINKELNBURG⁸ an stationären Hochstrombögen eingehend untersucht. Dabei wurde ein dünner Wolframdraht, der über einen Sondenwiderstand R_s mit Erde oder einer der Elektroden verbunden war, mit hoher Geschwindigkeit (bis 10^3 cm/sec) durch das Plasma bewegt. Der Spannungsabfall am Widerstand R_s ist — bis auf das Kontaktpotential — gleich dem Plasmapotential am Ort der Sonde, wenn R_s groß gegen den Widerstand der Plasmasäule zwischen Sonde und Bezugspunkt ist (Spannungsteiler). In Bögen hoher Dichte beträgt das Kontaktpotential einige Volt und ist praktisch temperaturunabhängig⁹. Deswegen, und weil es ohnehin gegenüber den gemessenen Potentialdifferenzen der Größenordnung 100 V nicht ins Gewicht fällt, werden die Meßergebnisse durch das Kontaktpotential praktisch nicht beeinflusst. Messungen mit bewegten Sonden lassen sich an unserer Entladung aus technischen Gründen nicht durchführen, weil die ganze dazu erforderliche Vorrichtung innerhalb der Feldspule und im Vakuum untergebracht werden müßte; außerdem müßte man Geschwindigkeiten von 10^4 cm sec⁻¹ erreichen, wenn die Aufenthaltsdauer der Sonde wesentlich kleiner als die Dauer der Entladung sein soll.

⁸ G. MÜLLER u. W. FINKELNBURG, Z. Angew. Phys. **8**, 6, 282 [1956].

⁹ W. FINKELNBURG u. H. MAECKER, Handbuch der Physik, Bd. XXII.

Deswegen wurden fest eingebaute Potentialsonden mit einer von DURAND¹⁰ entwickelten Schaltung verwendet. Dazu wurden 2 Paare von 1 mm starken Wolframdrähten in den zylindrischen Teil des Entladungsrohres eingeschmolzen, die bis fast an ihre Enden eingeglast waren. Diese Enden hatten von der Achse des Entladungsrohres einen Abstand von 1,5 cm; die Sondenpaare lagen symmetrisch zur Mittelebene der Anordnung. Es wurde nachgeprüft, ob die beiden Sonden eines Sondenpaares die gleiche Spannung anzeigten; im Rahmen der Meßgenauigkeit (10%) war das der Fall. Außerdem wurde der Sondenableitwiderstand variiert. Im Bereich $10^2 \Omega < R_s < 10^5 \Omega$ zeigte sich keine Änderung des Spannungsabfalls mit dem Widerstand. Die Entladung wird durch radiale Sonden nicht gestört, wenn ihr Achsenabstand etwa gleich dem Radius der leitfähigen Plasmasäule ist. Dagegen kann man den Spannungsabfall auf der Achse nicht mit radial eingeführten Sonden messen. Die Plasmasäule ist dann stark unsymmetrisch und hat wesentlich niedrigere Temperatur, letzteres hauptsächlich infolge der durch die Sonden produzierten Verunreinigungen. Außerdem dürfte die Störung der in Abschnitt 1 beschriebenen Plasmaströmung eine erhebliche Rolle spielen. Deswegen wurden zur Messung von E_z auf der Achse Potentialsonden axial von den Elektroden her eingeführt, wie aus Abb. 2 ersichtlich ist. Diese Sonden kann man bis an die Enden der frei brennenden Plasmasäule herankommen, ohne die Entladung merklich zu stören. Der kleinste gegenseitige Abstand der axialen Sonden, bei dem noch störungsfrei gemessen werden konnte, betrug 65 cm. Die axialen Sonden behindern die Plasmaströmung offenbar erheblich weniger als die bis zur Achse reichenden radialen Sonden; außerdem sorgt die Strömung dafür, daß die von der Sonde produzierten Verunreinigungen in die Trichter transportiert werden, also nicht in den frei brennenden Teil der Entladung diffundieren können.

3. Interpretation der Resultate. Das Modell des reibungsfreien Plasmas

Die Messung der Potentialverteilung lieferte das unerwartete Ergebnis, daß der Spannungsabfall auf der Achse der frei brennenden Plasmasäule um eine Größenordnung höher ist als an ihrem Rand. Die Stromdichteverteilung ist also nicht durch die Leitfähigkeitsverteilung allein gegeben, sondern der Bogenstrom wird wesentlich stärker auf die Achsenumgebung konzentriert, als es für $\partial E_z / \partial r = 0$ der Fall wäre.

Wie diese Stromkonzentration zustande kommt, läßt sich an Hand der Abb. 3 erklären. Diese Abbildung ist ebenso wie Abb. 2 ein Achsenschnitt der Anordnung in verzerrtem Maßstab. Die in dieser

Abbildung eingezeichneten Magnetfeldlinien sind nicht die des Gesamtmagnetfeldes \mathbf{B} ; dieses ist vielmehr wegen des Eigenmagnetfeldes $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ des Bogenstromes gewendet. In der Zeichenebene liegen die Feldlinien des meridionalen Magnetfeldes $\mathbf{B}_m = B_r \mathbf{e}_r + B_z \mathbf{e}_z$, das praktisch ausschließlich von der Feldspule erzeugt wird. [Zu \mathbf{B}_m tragen auch die Ringströme im Plasma mit der Stromdichte $j_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ bei. Diese sind zwar für den Druckaufbau ganz wesentlich, aber das von ihnen zusätzlich erzeugte Magnetfeld beeinflusst \mathbf{B}_m nur wenig ($\beta = 2 \mu_0 p / B^2 \ll 1$).] Ebenso wie \mathbf{B} zerlegen wir auch die Stromdichte $\mathbf{j} = \mathbf{j}_m + j_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Wegen der Krümmung der Magnetfeldlinien (die in Abb. 3 infolge der Maßstabsverzerrung stark übertrieben ist), ist es zweckmäßig, statt der Einheitsvektoren \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_z die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{B}_m / B_m$ und $\mathbf{e}_{r'} = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_{z'}$ einzuführen. Damit gilt per def. $B_{z'} > 0$, $B_{r'} \equiv 0$. $j_{z'}$ ist die zu \mathbf{B}_m parallele, $j_{r'}$ die zu \mathbf{B}_m senkrechte Komponente der meridionalen Stromdichte \mathbf{j}_m . $j_{r'} > 0$ bedeutet, daß der Bogenstrom die magnetischen Feldlinien nach außen durchsetzt. Der Einfachheit halber setzen wir $j_{z'} > 0$.

Verfolgen wir nun an Hand der Abb. 3 die magnetische Flußröhre, die den Außenradius der Elektroden tangiert, in ihrem Verlauf zwischen den Elektroden. Dieser Flußröhre wurden die Führungstrichter angepaßt. Sie verengt sich im Mittelteil der Anordnung zu einem Zylinder (homogenes Magnetfeld) von 0,4 cm Radius. Die leitfähige Plasmasäule, die in Abb. 3 durch Punktierung dargestellt ist, hat aber im Mittelteil einen erheblich größeren Radius, nämlich je nach Bogenstromstärke 1,2 bis 1,4 cm. Der Vergleich der Abb. 2 und 3 zeigt also, daß die Potentialverteilung so wirkt, daß der Bogenstrom bevorzugt innerhalb der den Elektrodenradius tangierenden magnetischen Flußröhre fließt, deren Querschnitt nur rund 1/10 des Querschnittes der leitfähigen Plasmasäule ausmacht. Wie diese Potentialverteilung zustande kommt, ergibt sich aus dem weiteren experimentellen Befund, daß das Plasma rotiert, und zwar vor beiden Trichterausgängen mit entgegengesetztem Drehsinn. Diese Rotation wurde bei der spektroskopischen side-on-Beobachtung des Plasmas festgestellt. An schmalen Linien konnte eine Doppler-Verschiebung gemessen werden¹¹. Der Drehsinn ist, wie in Abb. 3 angegeben, so, daß die EMK

¹⁰ J. DURAND, Z. Naturforsch. **18 a**, 3, 321 [1963].

¹¹ Diese Messungen wurden von K. BERGSTEDT durchgeführt, dem der Verf. für die Überlassung der Ergebnisse dankt.

$v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}_m$ dem elektrischen Feld in r' -Richtung entgegenwirkt (vgl. Abb. 2). Der Betrag der Rotationsgeschwindigkeit liegt zwischen 1 und $2 \cdot 10^6$ cm/sec. Zur Abschätzung der von der Rotationsbewegung hervorgerufenen EMK wollen wir annehmen, daß v_φ linear vom Radius abhängt und bei $r = 1,2$ cm (das ist der Radius des Trichterausganges) den Wert $1,5 \cdot 10^6$ cm/sec erreicht. Beträgt B_m im Bereich homogenen Magnetfeldes 60 kG, so ist an den Spulenenden $B_m = 30$ kG. Mit diesen Werten erhält man $\int v_\varphi B_m dr = \pm 270$ V, was ziemlich gut den am Spulenende gemessenen radialen Spannungen entspricht.

Diese Übereinstimmung spricht stark dafür, daß die Rotation einen wesentlichen Stromfluß senkrecht zu den \mathbf{B}_m -Linien verhindert, und legt deswegen nahe, die Stromverteilung im Plasma durch die in Abb. 4 wiedergegebene Ersatzschaltung zu beschreiben: Zwei Unipolarinduktoren sind an der Drehachse und am Rand durch je einen Leiter verbunden. An diese Anordnung wird eine Spannung angelegt. Ist kein Magnetfeld vorhanden, verteilt sich der Strom auf beide Leiter entsprechend ihren Wider-

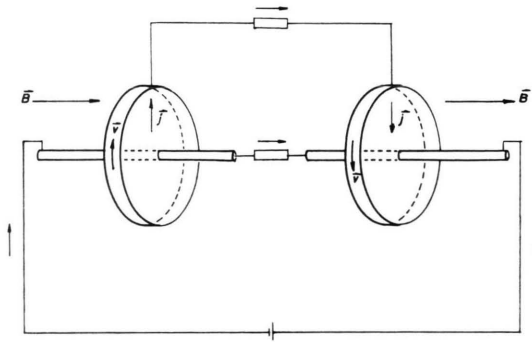


Abb. 4. Ersatzschaltung für die Stromverteilung in einem rotierenden Plasma: Zwei Unipolarinduktoren sind an den Achsen und am Rand durch je einen Leiter verbunden. Solange in den Induktorscheiben radialer Strom fließt, steigt die Drehzahl an. Im Endzustand hält die EMK $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dem angelegten elektrischen Feld das Gleichgewicht, so daß radial und damit im Außenleiter kein Strom mehr fließt; der ganze Strom fließt dann in dem Leiter, der die Achsen verbindet.

ständen. Das entspricht dem Lichtbogen ohne äußeres Magnetfeld. Befinden sich die Induktorscheiben dagegen in einem zu ihren Achsen parallelen Magnetfeld, so versetzt sie der in ihnen radial fließende Strom in gegenläufige Rotation, deren Drehsinn nach der Lenzschen Regel dadurch gegeben ist, daß die EMK $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ dem Stromfluß jeweils entgegenwirkt. Solange aber Strom fließt, werden die Scheiben beschleunigt. Die Rotationsgeschwindigkeit wächst deshalb an, bis $E_r + v_\varphi B_z = 0$ geworden ist. Die Schei-

ben laufen dann stromlos mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und der gesamte Strom fließt in dem die Achsen verbindenden Leiter. Das ist natürlich nur im Idealfall so; in einem realen Unipolarinduktor ist wegen der unvermeidlichen Reibungsverluste zur Aufrechterhaltung einer konstanten Winkelgeschwindigkeit Leistung erforderlich. Es fließt deshalb ein gewisser Reststrom durch die Scheiben und die Leistung $j_r E_r$ kommt für die Reibungsverluste auf.

Diese Betrachtung läßt sich auf das Plasma übertragen: Sobald der Bogenstrom, von der Anode kommend, den Trichter verlassen hat, sucht er die durch die Wahl des Elektrodenradius ausgezeichnete magnetische Flußröhre nach außen zu durchsetzen, um die gesamte leitfähige Plasmasäule auszufüllen. Es tritt also eine Stromdichte $j_r' \mathbf{e}_{r'}$ senkrecht zu \mathbf{B}_m auf, wie in Abb. 3 eingezeichnet. Nach der Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

erfährt das Plasma eine azimuthale Beschleunigung in Richtung von $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})_\varphi \mathbf{e}_\varphi = -j_r' B_z' \mathbf{e}_\varphi$. (Wir erinnern daran, daß unser Koordinatensystem r', φ, z' so gewählt ist, daß $B_{r'} \equiv 0$ ist.) Also hat auch die Rotationsgeschwindigkeit $v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ diese Richtung. Setzen wir diese in das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz der Magnetohydrodynamik

$$(1/\sigma) \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3)$$

ein, so finden wir in Übereinstimmung mit der Lenzschen Regel, daß die EMK $v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}_m$ die Richtung von $-j_r' \mathbf{e}_{r'}$ hat, also zu verhindern sucht, daß die \mathbf{j}_m -Linien die \mathbf{B}_m -Linien schneiden. Der Bruchteil des Bogenstromes, der trotzdem die ausgezeichnete Flußröhre verläßt, muß „spätestens“ vor dem Kathodentrichter in diesen, und damit wieder in die ausgezeichnete Flußröhre zurückfließen. Dort kehren also j_r' , E_r' und v_φ ihre Vorzeichen um, wie es in Abb. 3 angegeben ist.

Die Rotationsbewegung des Plasmas hat also die gleiche Funktion wie die Rotation der Unipolarinduktoren in Abb. 4. Wir hatten oben festgestellt, daß in der Ersatzschaltung der Stromfluß senkrecht zum Magnetfeld völlig unterdrückt wird, wenn die Rotation nicht durch Reibungskräfte behindert wird. Die Reibung, um die es sich hier handelt, ist die innere Reibung des Plasmas. Sie ist in der Bewegungsgleichung (2) vernachlässigt. Die Diskussion der

φ -Komponente dieser Gleichung gibt also Auskunft über die Einstellung der Stromdichte j_r in einem reibungsfreien Plasma. Dazu schreiben wir den Trägheitsterm

$$\varrho \, d\mathbf{v}/dt = \varrho \, \partial \mathbf{v} / \partial t + \varrho \, \text{grad } v^2/2 - \varrho \, \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$$

aus und setzen $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Das liefert

$$\varrho \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} - \varrho [\mathbf{v}_m \times \text{rot } v_\varphi \mathbf{e}_\varphi]_\varphi = -j_r B_z'. \quad (2 \varphi)$$

Dabei haben wir von der Rotationssymmetrie Gebrauch gemacht: $\partial/\partial\varphi = 0$. Wir betrachten jetzt das stationäre Gleichgewicht $\partial/\partial t = 0$. Für $\mathbf{v}_m = 0$ verschwindet außer der lokalen auch die konvektive Beschleunigung, so daß dann aus Gl. (2 φ) $j_r = 0$ als Bedingung für stationäres Gleichgewicht folgt. Daß auch bei vorhandener meridionaler Plasmaströmung $\mathbf{v}_m = v_r \mathbf{e}_r + v_z \mathbf{e}_z$ nur Zustände mit $j_r = 0$ stationär sein können, erkennt man nicht direkt aus der Bewegungsgleichung, wohl aber aus dem Energiesatz für die kinetische Energie. Diesen erhält man durch skalare Multiplikation der Gl. (2) mit \mathbf{v} . Das liefert, wieder für $\partial/\partial\varphi = 0$, $\partial/\partial t = 0$,

$$\varrho \mathbf{v}_m \nabla \left(\frac{1}{2} v_m^2 + \frac{1}{2} v_\varphi^2 \right) + \mathbf{v}_m \nabla p = \mathbf{v}_m (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_m - v_\varphi j_r B_z'.$$

Dabei ist $-v_\varphi j_r B_z'$ die von der Kraftdichte $j_r \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_m$ am Plasma geleistete Arbeit. Da v_φ und j_r entgegengesetzte Vorzeichen haben, ist $-v_\varphi j_r B_z'$ positiv definit. Diese Arbeit kann nun nicht zur Erhöhung der inneren Energie beitragen, da $j_r \mathbf{e}_r \times \mathbf{B}_m$ auf dem Druckgradienten senkrecht steht und da Dissipation durch innere Reibung nach Voraussetzung nicht stattfindet. Sie wird also vollständig in kinetische Rotationsenergie umgesetzt. Somit muß

$$\varrho \mathbf{v}_m \nabla \left(\frac{1}{2} v_\varphi^2 \right) = -v_\varphi j_r B_z'$$

gelten. Dafür läßt sich wegen $\text{div } \varrho \mathbf{v}_m = 0$ auch

$$\text{div} (\varrho \mathbf{v}_m \cdot \frac{1}{2} v_\varphi^2) = -v_\varphi j_r B_z'$$

schreiben. Integriert man diese Gleichung über das Volumen des Entladungsrohres, so erhält man unter Verwendung des Gaußschen Satzes

$$\oint_F \varrho \mathbf{v}_m \cdot \frac{1}{2} v_\varphi^2 d\mathbf{f} = - \int v_\varphi j_r B_z' dV,$$

wobei das Oberflächenintegral über die Wand des Entladungsrohres zu erstrecken ist und somit verschwindet. Der Integrand auf der rechten Seite ist für $j_r \neq 0$ positiv definit. Es muß somit im stationären Fall $j_r = 0$ gelten, denn für $j_r \neq 0$ würde die Rotationsenergie laufend zunehmen.

Im Fall des reibungsfreien Plasmas stellt sich die stationäre Stromdichteverteilung hier also so ein, daß \mathbf{j}_m zu \mathbf{B}_m parallel verläuft, weil einer Kraftdichte $\mathbf{j}_m \times \mathbf{B}_m$ kein stationäres Gleichgewicht gehalten werden kann. Wir möchten noch einmal daran erinnern, daß dies letzten Endes in der Geometrie des Problems, d. h. in der Rotationssymmetrie begründet ist. Deshalb darf die hier gewonnene Aussage nicht in der Weise verallgemeinert werden, daß man aus der Reibungsfreiheit folgert, stationäre Ströme seien nur parallel zu \mathbf{B} möglich. Ein einfaches Gegenbeispiel ist das folgende: In x -Richtung werde eine Spannung an ein Plasma angelegt, in dem ein äußeres Magnetfeld in y -Richtung vorhanden ist. Dann beschleunigt die Kraftdichte $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ das Plasma in z -Richtung. Bei Anwesenheit einer Wand wird ein Druckgradient in dieser Richtung aufgebaut, der der Kraftdichte $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ das Gleichgewicht halten kann, so daß ein Strom senkrecht zu \mathbf{B} fließen kann. Ebenso fließen in der hier betrachteten Anordnung stationäre Ströme in φ -Richtung. Für $B_\varphi = 0$ würden sie genau senkrecht zu \mathbf{B} fließen. Das wird durch das Magnetfeld nicht verhindert, weil der Kraftdichte $j_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}_m$ durch den Druckgradienten das Gleichgewicht gehalten werden kann.

Die innere Reibung, also sozusagen der mechanische Widerstand des Plasmas, spielt somit für die Einstellung der Stromdichteverteilung eine ganz ähnliche Rolle wie der elektrische Widerstand für die Einstellung der Strömungsgeschwindigkeit. Betrachten wir wieder ein stationäres Plasma in einem stationären Magnetfeld \mathbf{B}_m . Eine Geschwindigkeit $v_r \mathbf{e}_r$ senkrecht zu \mathbf{B}_m ruft nach Gl. (3) die Stromdichte $j_\varphi = -\sigma v_r B_z'$ hervor, denn wegen Stationarität und Rotationssymmetrie kann die azimutale EMK $v_r B_z'$ nicht durch eine elektrische Feldstärke $E_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ (einen Potentialgradienten) kompensiert werden. Für $\sigma \rightarrow \infty$ (verschwindender elektrischer Widerstand) muß $v_r = 0$ gelten, d. h. die Strömung \mathbf{v}_m parallel zu \mathbf{B}_m verlaufen. Dagegen ist auch für $\sigma \rightarrow \infty$ eine Rotationsbewegung $v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ senkrecht zu \mathbf{B}_m zulässig, da sie eine elektrische Feldstärke $E_r \mathbf{e}_r$ aufbauen kann. Ebenso wie hier das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz die Strömung \mathbf{v}_m bestimmt, ist die Bewegungsgleichung für \mathbf{j}_m maßgebend. Aus $j_r = 0$ folgt dann nach Gl. (3)

$$E_r + v_\varphi B_z' - v_z B_\varphi = 0 \quad (3 r')$$

als Bedingung für Stromlosigkeit in r' -Richtung. Dabei spielt der letzte Term dieser Gleichung prak-

tisch keine Rolle: Die Strömungsgeschwindigkeit v_z' parallel zu \mathbf{B}_m kann aus dem axialen Druckabfall abgeschätzt werden. Danach sollte sie an den Spulenden ihre Maxima haben und dort etwa 10^6 cm/sec betragen, also von gleicher Größenordnung wie v_φ sein. Direkte Beobachtungen, wieder mit Hilfe der Doppler-Verschiebung schmaler Linien¹¹, bestätigen das. Wegen $|B_\varphi| \ll B_z'$ ist $|v_z B_\varphi| \ll |v_\varphi B_z'|$, also $E_r' \approx -v_\varphi B_z'$. Das entspricht gerade unserem experimentellen Befund, wonach an den Enden der frei brennenden Plasmasäule die radialen Spannungen und $\int v_\varphi B_z dr$ übereinstimmen. Es liegt somit nahe, das Plasma in unserer Entladung als reibungsfrei zu betrachten. Um zu zeigen, daß dieses Konzept physikalisch sinnvoll ist, wollen wir rekapitulieren, wie sich Materie unter dem Einfluß der inneren Reibung bewegt. Der Einfachheit halber betrachten wir dazu zunächst ein Gas, das durch eine kurzzeitig wirkende Kraft in einen Rotationszustand mit beliebiger Geschwindigkeitsverteilung $v_\varphi(r)$ versetzt worden ist. Die innere Reibung des Gases allein wirkt dann dahingehend, daß sich ein reibungsfreier Zustand einzustellen sucht. Ein Gas mit homogener Temperatur und infolgedessen konstanter Viskosität tendiert also dahin, wie ein starrer Körper, d. h. mit der Geschwindigkeit $v_\varphi = \Omega r$ bei konstanter Kreisfrequenz Ω zu rotieren. Daß diese Geschwindigkeit sich nicht einstellt, liegt an der Reibung des Gases an der Wand, die erzwingt, daß die Rotationsgeschwindigkeit an der Rohrwand verschwindet. Die wahre Geschwindigkeitsverteilung wird somit folgende sein: v_φ nimmt von der Achse an zunächst etwa linear zu, durchläuft dann aber in Wandnähe ein Maximum und fällt zur Wand hin auf 0 ab. $v_\varphi(r)$ wird in Achsennähe um so weniger von dem der starren Rotation entsprechenden Verlauf abweichen, je größer der Rohrradius ist.

Prinzipiell das gleiche gilt für die Einstellung der Rotationsgeschwindigkeit im Plasma. Beim Einschalten des Bogenstromes fließt kurzzeitig Strom senkrecht zu den \mathbf{B}_m -Linien und versetzt das Plasma in Rotation, die auf die Umgebung der stromführenden Säule übertragen wird. Ohne die Reibung des Plasmas bzw. des Neutralgases an der Wand würde sich eine reibungsfreie Bewegung einstellen. Wegen der Wandreibung kann aber die Bewegung insgesamt nicht reibungsfrei sein, woraus $j_r' \neq 0$ folgt. Offenbar wird aber die Abweichung der tatsächlichen von der gedachten reibungsfreien Bewegung in der Achsenumgebung, also gerade im stromführenden Be-

reich, am geringsten sein. Das Plasma kann im Hinblick auf die Stromdichteverteilung dann als praktisch reibungsfrei betrachtet werden, wenn j_r' trotz reibender Bewegung überall so klein ist, daß fast der ganze Strom in der durch die Wahl des Elektrodenradius ausgezeichneten Flußröhre verbleibt. Bezeichnet man den Radius dieser Flußröhre mit r_a , so ist

$$I_a = \int_0^{r_a} j_z 2\pi r dr \gg \int_{r_a}^{r_\sigma} j_z 2\pi r dr = I - I_a \quad (4)$$

das Kriterium für Reibungsfreiheit im oben definierten Sinn (r_σ ist wieder der Radius der leitfähigen Plasmasäule).

Kriterium (4) ist im experimentell vorliegenden Plasma erfüllt, wie sich folgendermaßen zeigen läßt: Wir berechnen zunächst den Gesamtstrom I nach Gl. (1) und bestimmen dabei E_z aus den direkt gemessenen axialen Spannungen und σ wieder aus einem im Mittelteil gemessenen Temperaturprofil. $E_z(r)$ ist aus dem Experiment allerdings nur auf der Achse und am Rand der leitfähigen Plasmasäule bekannt. Streng genommen sind sogar nur die Mittelwerte über die Sondenabstände durch die Messung gegeben. Es erscheint jedoch plausibel, daß diese Mittelwerte etwa mit den Werten von $E_z(r, z)$ im Bereich homogenen Magnetfeldes übereinstimmen, weil dieses Gebiet gut 5/6 der Länge der frei brennenden Plasmasäule ausmacht. Setzt man nun verschiedene Funktionen $E_z(r)$ derart an, daß sie für $r=0$ und $r=r_\sigma$ die gemessenen E_z -Werte liefern, und setzt diese Funktionen in Gl. (1) ein, so erhält man Rechenwerte für den Bogenstrom I , die wegen der Willkür in der Wahl des Verlaufs von $E_z(r)$ zwischen Achse und Rand keineswegs mit dem direkt gemessenen Strom I zusammenfallen müssen. Nimmt man z. B. an, daß $E_z(r)$ von der Achse an zunächst sehr langsam abnimmt und erst am Rand steil auf den Wert $E_z(r_\sigma) \approx 0,1 E_z(0)$ abfällt, so kommt ein viel zu großer Strom heraus. Umgekehrt erhält man zu kleine Werte für I , wenn man eine zu kleine Halbwertsbreite von $E_z(r)$ ansetzt. Die Willkür in der Wahl des relativen Verlaufs der Funktion $E_z(r)$ wird somit durch die Bedingung, daß $E_z(r)$ den direkt gemessenen Strom I liefern muß, stark eingeschränkt. Man kann deswegen unter Benutzung einer Funktion $E_z(r)$, die diese Bedingung erfüllt, mit einiger Zuverlässigkeit angeben, wie sich der Gesamtstrom I auf die Gebiete $0 \leq r \leq r_a$ und $r_a \leq r \leq r_\sigma$ verteilt. Man findet so $I_a = (0,8 \pm 0,1) I$ und somit ist Kri-

terium (4) erfüllt. Rund 80% des gesamten Stromes fließen also in einem Querschnitt, der nur etwa 10% des Querschnittes der leitfähigen Plasmasäule ausmacht.

Zur Verdeutlichung wollen wir hinzufügen, daß man ein wesentlich anderes Resultat erhält, wenn man I_a und $I - I_a$ so berechnet, als ob die Stromdichteverteilung allein durch die Leitfähigkeit bestimmt wäre, d. h. wenn man $E_z = \text{const}$ setzt. Das liefert $I_a \approx 0,3 I$, d. h. 70% des Bogenstromes würden in diesem Fall außerhalb der ausgezeichneten Flußröhre fließen. Das Plasma im Inneren dieser Flußröhre ist ein guter Leiter mit kleinem Querschnitt, das Plasma außerhalb ein schlechter Leiter, aber mit großem Querschnitt. Das würde ohne den Stromeinschluß durch das Magnetfeld den Ausschlag geben.

Der Bogenstrom fließt also, wie wir gesehen haben, praktisch vollständig innerhalb der durch den Elektrodenradius ausgezeichneten magnetischen Flußröhre. Wir hatten an Hand der magnetohydrodynamischen Gleichungen gezeigt, daß dieses Verhalten dann zu erwarten ist, wenn die innere Reibung die Einstellung der Rotationsbewegung nur unmerklich beeinflusst. Dabei war es die Bewegungsgleichung, die für ein reibungsfreies Plasma die Aussage $j_r = 0$ lieferte; aus dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz folgt dann die Bedingung $E_r + v_\phi B_z = 0$. Die Einstellung der Stromdichteverteilung j_m wird demnach primär durch das dynamische Verhalten des Plasmas bestimmt. Das ist insofern eine merkwürdige Aussage, als die Bewegung des Plasmas ja überwiegend durch die Bewegung des Ionengases, der Stromfluß hingegen hauptsächlich durch die Bewegung des Elektronengases bestimmt wird. Dieser Sachverhalt wird in den Gleichungen der Magnetohydrodynamik nicht berücksichtigt; diese behandelt das Plasma ja als eine einheitliche Flüssigkeit. In einem Plasma, das aus Elektronen und Z -fach geladenen Ionen besteht, hängen Schwerpunktgeschwindigkeit und Stromdichte mit den Geschwindigkeiten der Elektronen und Ionen durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + Z(m_e/m_i) \mathbf{v}_e; \quad \mathbf{j} = e n_e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (5)$$

zusammen ($n_e = Z n_i$). Wir wollen nachprüfen, inwieweit die obigen Aussagen über den Stromeinschluß durch die Zwei-Flüssigkeits-Theorie bestätigt werden, und gehen dazu von den Bewegungsgleichungen des Ionen- und des Elektronengases in der zuerst von SCHLÜTER¹² angegebenen Form aus.

Diese lauten:

$$\varrho_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \nabla p_i = Z e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ei},$$

$$\varrho_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \nabla p_e = -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}_{ei}.$$

Dabei ist \mathbf{R}_{ei} der von den Elektronen durch Stöße pro Zeit- und Volumeneinheit an die Ionen abgegebene Impuls; alle anderen Größen haben die übliche Bedeutung.

In diesen beiden Gleichungen ist ebenfalls die innere Reibung, d. h. die des Elektronengases und des Ionengases vernachlässigt. Aus ihnen erhält man durch Addition die Bewegungsgleichung des Gesamtplasmas. Sie stimmt mit der Gl. (2) der Magneto-hydrodynamik überein, wenn man noch die Trägheitsterme durch die ebenfalls von Schlüter eingeführte Annahme der schleichenden Diffusion¹² vereinfacht. Diese Annahme ist für unser Plasma sicher zulässig, wovon wir uns bereits früher⁷ überzeugt hatten. Für ein reibungsfreies Plasma bleibt somit die Aussage bestehen, daß im stationären Fall $j_r = 0$ gelten muß, denn diese Aussage wurde ja aus der Bewegungsgleichung allein gewonnen.

Für ein reibungsfreies Plasma liefern Magneto-hydrodynamik und Zwei-Flüssigkeits-Theorie also die gleiche Aussage über die Einstellung der Stromdichteverteilung. Wesentliche Abweichungen ergeben sich dagegen für reibendes Plasma aus dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz der Zwei-Flüssigkeits-Theorie. Dieses besagt nämlich, wie wir gleich zeigen werden, daß auch im Fall endlicher innerer Reibung die Stromdichte j_m weitgehend in der ausgezeichneten Flußröhre eingeschlossen bleiben kann. Für die Interpretation unserer Meßergebnisse bedeutet das folgendes: Aus dem Befund allein, daß der Bogenstrom ganz überwiegend innerhalb der ausgezeichneten Flußröhre fließt, können wir noch nicht folgern, daß der Stromeinschluß ausschließlich durch die Rotationsbewegung bewirkt wird. Kriterium (4) für die Anwendbarkeit des reibungsfreien Modells ist deswegen nur notwendig, nicht aber hinreichend.

Wie der Stromeinschluß im Fall endlicher innerer Reibung zustande kommt, erkennt man am einfachsten, wenn man die Herleitung des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes der Zwei-Flüssigkeits-Theorie verfolgt. Man hat dazu die Bewegungsgleichungen

¹² A. SCHLÜTER, Intern. Astronomical Union, Symp. No. 6, paper 8, 71 [1956].

der Ionen und Elektronen durch die jeweiligen Massendichten zu dividieren und dann beide voneinander zu subtrahieren. Setzt man wieder schleichende Diffusion voraus, so fallen die Trägheitsterme weg, und alle Beiträge der Ionen sind von der Ordnung m_e/m_i klein gegen die entsprechenden Beiträge der Elektronen. Es bleibt somit

$$-(1/e n_e) \mathbf{R}_{ei} = \mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} + (1/e n_e) \nabla p_e. \quad (6)$$

Diese Gleichung hätte man aus der Bewegungsgleichung der Elektronen allein erhalten, wenn man den Trägheitsterm von vornherein gestrichen hätte. Gl. (6) ist praktisch schon das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz der Zwei-Flüssigkeits-Theorie. Der Impulsaustauschterm \mathbf{R}_{ei} kann nämlich als proportional zur Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$, somit auch als proportional zur Stromdichte \mathbf{j} angesetzt werden. Nach Gl. (6) ist somit das Verhalten des Elektronengases für den Stromfluß maßgebend. Insbesondere tritt jetzt die Geschwindigkeit \mathbf{v}_e der Elektronen an die Stelle der Schwerpunktsgeschwindigkeit \mathbf{v} im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz der Magnetohydrodynamik. In die zu Gl. (3 r') analoge Stromlosigkeitsbedingung für die r' -Richtung geht jetzt die EMK $v_{e\varphi} B_z'$ an Stelle von $v_\varphi B_z'$ ein. Welche Unterschiede sich daraus für reibungsfreies und reibendes Plasma ergeben, erkennt man, wenn man (wie üblich) \mathbf{v}_e durch \mathbf{v} und \mathbf{j} ausdrückt. Aus Gl. (5) erhält man $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - (1/e n_e) \mathbf{j}$. Setzt man dies und den obigen Ansatz für \mathbf{R}_{ei} in Gl. (6) ein, so erhält man

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \left(\mathbf{v} - \frac{1}{e n_e} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{e n_e} \nabla p_e \quad (7)$$

als verallgemeinertes Ohmsches Gesetz der Zwei-Flüssigkeits-Theorie. Dabei ist

$$\sigma = e^2 n_e \tau_e / m_e \quad (8)$$

die Leitfähigkeit des Plasmas, wo $1/\tau_e$ die Stoßfrequenz der Elektronen ist.

Die Stromdichte $j_{r'}$ ruft nicht nur über die Kraftdichte $j_{r'} \mathbf{e}_{r'} \times \mathbf{B}_m$ eine Rotationsbewegung des Gesamtplasmas mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_φ und dadurch (ebenso wie in der magnetohydrodynamischen Näherung) die EMK $v_\varphi B_z'$ gegen $E_{r'}$ hervor, sondern sie treibt nach Gl. (7) über die Hall-EMK $-\mathbf{j} \times \mathbf{B} / e n_e$ auch einen azimutalen Hall-Strom

$$j_\varphi^{(H)} = (\sigma / e n_e) j_{r'} B_z'$$

an, der ebenfalls eine Gegen-EMK liefert. Dabei soll der Index H darauf hinweisen, daß $j_\varphi^{(H)}$ im allgemei-

nen nicht die volle Stromdichte in φ -Richtung ist. Diese sei

$$j_\varphi = j_\varphi^{(0)} + j_\varphi^{(H)},$$

wo $j_\varphi^{(0)}$ von der Stromdichteverteilung \mathbf{j}_m unbeeinflusst ist. Damit lautet die r' -Komponente der Gl. (7)

$$(1/\sigma) j_{r'} = E_{r'} + v_\varphi B_z' - v_{z'} B_\varphi - (1/e n_e) (j_\varphi^{(0)} B_z' + j_\varphi^{(H)} B_z') + (1/e n_e) j_{z'} B_\varphi + (1/e n_e) (\nabla p_e)_{r'}. \quad (7 r')$$

Wir suchen nun auf der rechten Seite der Gl. (7 r') alle elektromotorischen Kräfte zusammen, die nicht von $j_{r'}$ hervorgerufen werden, und bezeichnen ihre Summe mit $E_{r'}^*$. Wir finden dann

$$E_{r'}^* = -v_{z'} B_\varphi - (1/e n_e) (j_\varphi^{(0)} B_z' - j_{z'} B_\varphi) + (1/e n_e) (\nabla p_e)_{r'}. \quad (9)$$

Damit lautet Gl. (7 r'):

$$(1/\sigma) j_{r'} = E_{r'} + v_\varphi B_z' - (1/e n_e) j_\varphi^{(H)} B_z' + E_{r'}^*.$$

Für ein reibungsfreies Plasma ist $j_{r'} = 0$. Damit verschwindet $j_\varphi^{(H)}$ und wir erhalten

$$E_{r'} + v_\varphi B_z' + E_{r'}^* = 0 \quad (10)$$

als Bedingung für Stromlosigkeit in r' -Richtung. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Stromlosigkeitsbedingung (3 r') der magnetohydrodynamischen Näherung lediglich dadurch, daß $E_{r'}$ neben dem Term $-v_{z'} B_\varphi$ noch andere elektromotorische Kräfte enthält; diese spielen aber, wie an anderer Stelle¹³ gezeigt wurde, ebenso wie $-v_{z'} B_\varphi$ keine erhebliche Rolle, so daß näherungsweise wieder $E_{r'} + v_\varphi B_z' = 0$ ist.

Da für ein reibungsfreies Plasma $j_\varphi^{(H)}$ mit $j_{r'}$ verschwindet, ist

$$v_{e\varphi} = v_\varphi - (1/e n_e) j_\varphi^{(0)},$$

d. h. die Abweichung zwischen der Rotationsgeschwindigkeit des Elektronengases und der des Gesamtplasmas wird durch elektromotorische Kräfte hervorgerufen, die nichts mit der Stromdichte $j_{r'}$ zu tun haben. Wir werden später zeigen, daß in unserem Experiment

$$|(1/e n_e) j_\varphi^{(0)}| \ll |v_\varphi| \quad \text{gilt.}$$

Somit ist $v_{e\varphi} \approx v_\varphi$ und wegen $v_\varphi = v_{i\varphi} + Z m_e v_{e\varphi} / m_i$ ist auch $v_{i\varphi} \approx v_\varphi$. In einem reibungsfreien Plasma rotieren Elektronen- und Ionengas also mit fast gleicher Geschwindigkeit. In einem reibenden Plasma

¹³ O. KLÜBER, Institut für Plasmaphysik, Garching, Bericht Nr. 3/90.

ist das nicht mehr der Fall, und zwar wirkt sich die innere Reibung auf die Bewegung der Ionen immer weit stärker aus als auf die Bewegung der Elektronen. Das ist so wegen der unterschiedlichen Viskositäten beider Gase. Diese sind durch

$$\mu_e = n_e \tau_e k T / (1 + \omega_e^2 \tau_e^2),$$

$$\mu_i = n_i \tau_i k T / (1 + \omega_i^2 \tau_i^2)$$

gegeben, wo ω_i und $1/\tau_i$ analog zu ω_e und $1/\tau_e$ Gyrofrequenz und Stoßfrequenz der Ionen sind. Da $\tau_i \approx \sqrt{m_i/m_e} \tau_e$ ist, ist stets $\mu_e \ll \mu_i$. [Für $B=0$ ist $\mu_e \approx (m_e/m_i)^{1/2} \mu_i$, für $\omega_i^2 \tau_i^2 \gg 1$ ist $\mu_e \approx (m_e/m_i)^{3/2} \mu_i$.] Betrachten wir nun Verhältnisse, unter denen die innere Reibung des Ionengases die Ionengeschwindigkeit $v_{i\varphi}$ und damit die Schwerpunktschwindigkeit v_φ merklich reduziert, unter denen aber die innere Reibung des Elektronengases noch vernachlässigbar ist. Das dürfte in praktisch interessierenden Fällen fast immer zutreffen¹⁴. Dann ist die Relativgeschwindigkeit $v_{e\varphi} - v_{i\varphi}$ nicht mehr klein gegen $v_{e\varphi}$, d. h. dann spielt der Hall-Strom $j_\varphi^{(H)}$ eine wesentliche Rolle für den Stromeinschluß. Nun können wir unter Benutzung der Gl. (8)

$$j_\varphi^{(H)} = \omega_e \tau_e j_{r'} \quad (11)$$

schreiben. Damit erhalten wir für die Hall-EMK in r' -Richtung

$$-(1/e n_e) j_\varphi^{(H)} B_{z'} = -\omega_e \tau_e j_{r'} B_{z'} / e n_e$$

$$= -(\omega_e^2 \tau_e^2 / \sigma) j_{r'}.$$

Damit können wir Gl. (7 r') auf die Form

$$(1/\sigma) j_{r'} = (1/(1 + \omega_e^2 \tau_e^2)) (E_{r'} + v_\varphi B_{z'} + E_{r'}^*)$$

bringen, worin der Faktor $1/(1 + \omega_e^2 \tau_e^2)$ die Rückwirkung des Hall-Stromes $j_\varphi^{(H)}$ auf die Stromdichte $j_{r'}$ beschreibt. Diese ist ganz erheblich, wenn $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ ist, wie es für das hier experimentell untersuchte Plasma im frei brennenden Teil der Entladung der Fall ist. Nach dieser Gleichung kann im Grenzfall $v_\varphi = 0$ die Hall-EMK allein dafür sorgen, daß $j_{r'}$ sehr klein bleibt, so daß ein praktisch vollständiger Einschluß des Bogenstromes in die ausgezeichnete Flußröhre auch ohne Rotationsbewegung zustande kommen kann.

In einem realen Plasma mit endlicher innerer Reibung wird die Stromdichteverteilung prinzipiell immer durch das Zusammenwirken der Rotationsbewe-

gung und des azimutalen Hall-Stromes bestimmt. Dabei kann nicht generell entschieden werden, ob einer der beiden Effekte dominiert, oder ob sie elektromotorische Gegenkräfte von gleicher Größenordnung hervorrufen. Das ist zunächst einmal eine Frage der Geometrie. Wählt man z. B. Formgebung und Anordnung der Elektroden so, daß der Bogenstrom nicht von der Kathode zur Anode gelangen kann, ohne B_m -Linien zu schneiden, so wird schon dadurch das Auftreten eines Hall-Stromes erzwungen. Die hier betrachtete Anordnung ermöglicht dagegen die Einstellung einer stationären Stromdichteverteilung mit $j_{r'} = 0$, d. h. ohne Mitwirkung des Hall-Stromes. Daß in einem solchen Fall die Rotationsbewegung den Stromeinschluß dominierend bestimmen wird, kann man sich klar machen, wenn man den energetischen Aufwand für den Stromeinschluß betrachtet. Dazu multiplizieren wir die vorige Gleichung mit $j_{r'}$. Das ergibt

$$j_{r'} E_{r'} + j_{r'} E_{r'}^* = (1/\sigma) j_{r'}^2 + (\omega_e^2 \tau_e^2 / \sigma) j_{r'}^2 - j_{r'} v_\varphi B_{z'}.$$

$j_{r'} E_{r'}$ ist die vom elektrischen Feld am Strom $j_{r'}$ geleistete Arbeit; sie wird — je nach den Vorzeichen von $j_{r'}$ — vermehrt oder vermindert um $j_{r'} E_{r'}^*$. Die Terme auf der rechten Seite sind positiv definit und stellen die infolge des Auftretens von $j_{r'}$ in Wärme umgesetzte Arbeit dar: der erste Term ist die direkt von $j_{r'}$, der zweite die vom Hall-Strom erzeugte Stromwärme. Die Arbeit $-j_{r'} v_\varphi B_{z'}$ wird für reibendes Plasma ebenfalls in Wärme umgewandelt. Da in diesem Fall $-j_{r'} B_{z'} = D(\mu v_\varphi)$ gilt, wo $D(\mu v_\varphi)$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung in den Ortskoordinaten ist, der die Reibungskraftdichte beschreibt, ist $-j_{r'} v_\varphi B_{z'} = v_\varphi D(\mu v_\varphi)$ die Reibungswärme. Zur Abschätzung können wir dafür $\mu v_\varphi^2 / a^2$ schreiben, wo a eine für die Ortsveränderlichkeit von v_φ charakteristische Länge bedeuten soll. Dann ist $q = \mu v_\varphi^2 \sigma / a^2 j_\varphi^{(H)^2}$ das Verhältnis der durch die innere Reibung thermalisierten kinetischen Energie zu der vom Hall-Strom entwickelten Stromwärme. Wir nehmen nun an, daß v_φ und $j_\varphi^{(H)}$ elektromotorische Kräfte gleicher Stärke liefern; das ist der Fall, wenn $j_\varphi^{(H)} = e n_e v_\varphi$ ist. Setzt man dies in das obige Verhältnis ein, schätzt μ durch $n_i \tau_i k T$ nach oben ab und verwendet Gl. (8) für σ , so erhält man nach einigen Umformungen $q = (\lambda/a)^2$, wo λ die freie Weglänge für Coulomb-Stöße ist. Es ist also $q \ll 1$, wenn die Rotationsgeschwindigkeit v_φ sich über eine freie Weglänge nur wenig ändert. Unter dieser ganz allgemeinen Voraussetzung — die schon erfüllt sein

¹⁴ Sobald die innere Reibung des Elektronengases so beträchtlich wird, daß sie in Konkurrenz zu anderen Kräften, z. B. zu $e \mathbf{E}$ oder zu $e \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$ tritt, muß sie natürlich auch im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz berücksichtigt werden.

muß, damit der Begriff „Viskosität“ überhaupt sinnvoll ist – ist der Energieaufwand für die Aufrechterhaltung der Rotationsbewegung also klein gegen den für die Aufrechterhaltung des Hall-Stromes. Deswegen ist der überwiegend durch die Rotationsbewegung bewirkte Stromeinschluß auch in einem realen, reibenden Plasma der bevorzugte Mechanismus.

Wir wollen das Modell des reibungsfreien Plasmas aber nicht nur durch die bisher angeführten Argumente rechtfertigen, sondern seine Anwendbarkeit auf experimentell gegebene Verhältnisse direkt zeigen. Dazu haben wir nachzuweisen, daß in der frei brennenden Plasmasäule der hier betrachteten Anordnung überall

$$(1/e n_e) |j_\varphi^{(H)}| B_z \ll |v_\varphi| B_z \quad (12)$$

erfüllt ist. Für die Umgebung der Trichterausgänge ist das bereits geschehen: Die gute Übereinstimmung zwischen den dort gemessenen radialen Spannungen und den aus ebenfalls dort gemessenen Geschwindigkeiten bestimmten Werten von $\int v_\varphi B_z dr$ besagt ja gerade, daß der Hall-Strom dort keine vergleichbare EMK liefert. Es bleibt aber noch zu zeigen, daß Ungl. (12) für die gesamte frei brennende Plasmasäule zutrifft. Dazu ziehen wir die Ergebnisse weiterer Messungen heran, bei denen das von den Ringströmen im Plasma – also auch von $j_\varphi^{(H)}$ – erzeugte Magnetfeld registriert wurde. Damit befaßt sich der folgende Abschnitt.

4. Experimentelle Untersuchungen über den Einfluß des Hall-Stromes auf die Verteilung des Bogenstromes

Über die Untersuchung der Ringströme im Plasma wurde bereits früher³ berichtet. Wir beschreiben im folgenden kurz das Meßverfahren und fassen die Ergebnisse zusammen, soweit sie für die Stromdichteverteilung j_m relevant sind; im übrigen verweisen wir auf die oben genannte Arbeit³.

Um gibt man das Entladungsrohr mit Induktionsspulen, die über dessen Länge verteilt sind, so kann man den Fluß des meridionalen Magnetfeldes B_m als Funktion von z messen. B_m setzt sich zusammen aus dem äußeren, d. h. von der Spule erzeugten Feld $B_m^{(a)}$ und dem um Größenordnungen schwächeren inneren Feld $B_m^{(i)}$, das auf die Stromdichte $j_\varphi e_\varphi$ im Plasma zurückgeht. Der von $B_m^{(i)}$ gelieferte Beitrag $\Phi^{(i)}(z)$ zum gesamten Fluß kann mit Hilfe eines Abgleichverfahrens bestimmt werden. Er hängt mit der

Stromdichte $j_\varphi(r, z)$ im Plasma durch

$$\Phi^{(i)}(z) = \gamma(z) \Phi_\infty^{(i)}(z)$$

zusammen, wo γ ein Geometriefaktor und

$$\Phi_\infty^{(i)}(z) = \mu_0 \int_0^{r_0} j_\varphi(r, z) \pi r^2 dr \quad (13)$$

ist. Dabei ist r_0 wieder der Radius der leitfähigen Plasmasäule. Die physikalische Bedeutung von $\Phi_\infty^{(i)}$ ist folgende: Ersetzt man bei festgehaltener Meßspule das tatsächlich vorhandene Plasma durch eine unendlich lange Plasmasäule, in der überall die Stromdichte herrscht, die im wirklichen Plasma an der Stelle z vorliegt, so würde man statt $\Phi^{(i)}(z)$ den Fluß $\Phi_\infty^{(i)}(z)$ messen. Wir beziehen uns im folgenden immer auf diesen „extrapolierten“ Fluß des inneren meridionalen Feldes und können deshalb die Indizes i und ∞ zur Vereinfachung der Schreibweise fortlassen.

Eine so gewonnene Kurve $\Phi(z)$ hat einen recht komplizierten Verlauf; insbesondere ist sie nicht symmetrisch zur Mittelebene $z = z' = 0$ der Anordnung. Man kann sofort sagen, daß diese Asymmetrie zumindest teilweise auf den Hall-Strom $j_\varphi^{(H)}$ zurückgehen muß. Wir hatten ja im dritten Abschnitt an Hand der Abb. 3 folgendes festgestellt: Wenn $j_{r'} \neq 0$ ist, so muß in der anodenseitigen Hälfte ($z' < 0$) Strom aus der ausgezeichneten Flußröhre herausfließen und in der kathodenseitigen Hälfte wieder hineinfließen. Es ist dann $j_{r'} < 0$ für $z' > 0$ und $j_{r'} > 0$ für $z' < 0$. Mit $j_{r'}$ wechselt natürlich auch $j_\varphi^{(H)}$ sein Vorzeichen und ruft dadurch eine Asymmetrie in $j_\varphi = j_\varphi^{(0)} + j_\varphi^{(H)}$ und damit in Φ hervor. Nun läßt sich weiter zeigen, daß die Stromdichte $j_\varphi^{(0)}$ symmetrisch zur Mittelebene ist. Das ergab die Analyse³ der $j_\varphi^{(0)}$ antreibenden elektromotorischen Kräfte. Somit geht die Asymmetrie in j_φ und Φ ausschließlich auf den Hall-Strom zurück. Die Symmetrieeigenschaften

$$j_\varphi^{(0)}(r', -z') = j_\varphi^{(0)}(r', z'), \quad j_\varphi^{(H)}(r', -z') = -j_\varphi^{(H)}(r', z')$$

bleiben natürlich auch beim Übergang zu Zylinderkoordinaten erhalten. Diese wollen wir im folgenden wieder benutzen, da die Umrechnung der Gl. (13) auf gestrichene Koordinaten die Ausdrücke unnötig kompliziert. Wenn wir also $\Phi(z)$ in den zu $z=0$ symmetrischen Anteil $\Phi^{(s)}(z)$ und den zu $z=0$ antisymmetrischen Anteil $\Phi^{(a)}(z)$ zerlegen, so zerlegen wir zugleich $\Phi(z)$ in die auf $j_\varphi^{(0)}$ und $j_\varphi^{(H)}$ zurück-

gehenden Beiträge. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\Phi^{(s)}(z) &= \frac{1}{2} (\Phi(z) + \Phi(-z)) \\ &= \mu_0 \int_0^{r_0} j_{\varphi}^{(0)}(r, z) \pi r^2 dr, \\ \Phi^{(a)}(z) &= \frac{1}{2} (\Phi(z) - \Phi(-z)) \\ &= \mu_0 \int_0^{r_0} j_{\varphi}^{(H)}(r, z) \pi r^2 dr.\end{aligned}\quad (14)$$

Eine so zerlegte Kurve ist in Abb. 5 wiedergegeben. Dabei wurde Φ/μ_0 an Stelle von Φ aufgetragen. Φ/μ_0 liefert nach Gl. (14) einen Anhaltspunkt für die Größenordnungen von $j_{\varphi}^{(0)}$ und $j_{\varphi}^{(H)}$.

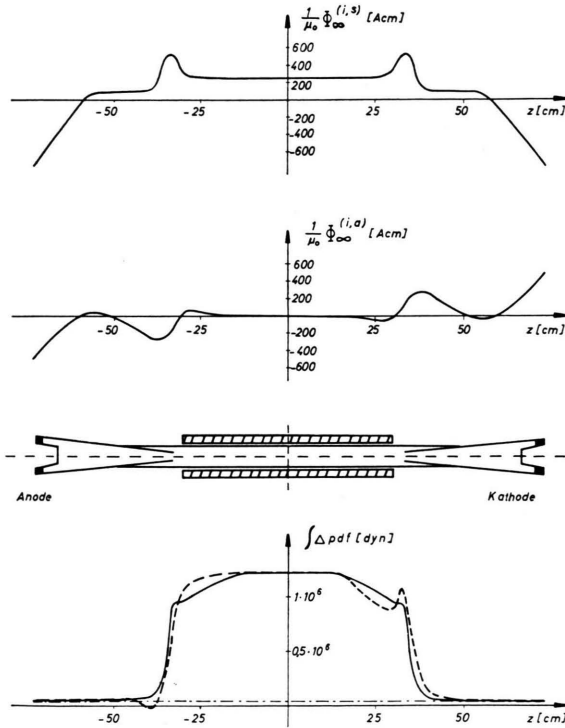


Abb. 5. Oben: Zerlegung einer gemessenen Verteilung $\Phi_{\infty}^{(i)}(z)/\mu_0 = \int j_{\varphi} \pi r^2 dr$ in den zu $z=0$ symmetrischen Anteil $\Phi_{\infty}^{(s)}/\mu_0$ und den zu $z=0$ antisymmetrischen Anteil $\Phi_{\infty}^{(a)}/\mu_0$. Der antisymmetrische Anteil geht auf den azimuthalen Hall-Strom $j_{\varphi}^{(H)} = \omega_e \tau_e j_{r'}$ zurück. Hier ist $B_z < 0$, so daß $j_{\varphi}^{(H)} < 0$ wird, wenn $j_{r'} > 0$ ist, d. h. wenn der Strom aus der ausgezeichneten Flußröhre herausfließt (vgl. Abb. 3). Mitte: Entladungsrohr und Feldspule. Unten: Flächenintegral $\int \Delta p df$ der Druckdifferenz zwischen Achse und Rand der Plasmasäule als Funktion von z . Die strichpunktierte Gerade stellt den Beitrag des pinch-Effektes dar. Die gestrichelte Kurve wurde mit, die ausgezogene Kurve ohne Berücksichtigung des antisymmetrischen Anteils $\Phi_{\infty}^{(a)}$ berechnet. Der Vergleich beider Kurven zeigt den geringen Einfluß des Hall-Stromes auf den Druckaufbau.

Der Verlauf der antisymmetrischen Kurve $\Phi^{(a)}(z)$ zeigt also unmittelbar, an welchen Stellen der Ent-

ladung die B_m -Linien von den j_m -Linien geschnitten werden. Nach Abb. 5 verschwindet $\Phi^{(a)}$ völlig im homogenen Teil des Magnetfeldes und ist nur in den Trichtern merklich von 0 verschieden. Auf die Trichter kommen wir später zurück; unser Interesse gilt primär dem Hall-Strom $j_{\varphi}^{(H)}$ im frei brennenden Teil der Entladung. Dort ist $|\Phi^{(a)}|$ nach Abb. 5 höchstens $0,1 |\Phi^{(s)}|$ und damit von der Größenordnung des Meßfehlers. Somit gilt im frei brennenden Teil

$$(1/e n_e) |j_{\varphi}^{(H)} B_z| \ll (1/e n_e) |j_{\varphi}^{(0)} B_z|. \quad (15)$$

Wir werden nun weiter zeigen, daß

$$(1/e n_e) |j_{\varphi}^{(0)} B_z| \ll |v_{\varphi} B_z| \quad (16)$$

gilt. Zusammenfassung beider Ungleichungen ergibt die Ungl. (12), die besagt, daß die vom Hall-Strom gelieferte EMK in r' -Richtung gegenüber $v_{\varphi} B_z'$ vernachlässigbar ist, der Stromeschluß also fast ausschließlich durch die Rotationsbewegung bestimmt wird.

Um die Gültigkeit der Ungl. (16) nachzuweisen, müssen wir uns zunächst mit dem Druckaufbau im frei brennenden Teil der Entladung befassen. Dazu gehen wir von der r -Komponente

$$\frac{\partial p}{\partial r} = j_{\varphi} B_z - j_z B_{\varphi} = j_{\varphi}^{(0)} B_z + j_{\varphi}^{(H)} B_z - j_z B_{\varphi} \quad (2r)$$

der Bewegungsgleichung aus. (Dabei wurde der konvektive Trägheitsterm mit folgender Begründung vernachlässigt: Im Innenraum der Feldspule ist der Winkel zwischen \mathbf{e}_r und $\mathbf{e}_{r'}$ sehr klein, so daß \mathbf{e}_r praktisch senkrecht auf \mathbf{B} steht. Es ist plausibel, daß in der Richtung senkrecht zu \mathbf{B} keine merklichen Trägheitskräfte auftreten. Detailliertere Betrachtung⁷ der Verhältnisse bestätigt das.) Multipliziert man Gl. (2r) mit πr^2 und integriert sie dann von $r=0$ bis $r=r_0$, so erhält man [unter Benutzung von $\mu_0 r j_z = \partial(r B_{\varphi})/\partial r$]

$$\begin{aligned}\int \Delta p df &\equiv \int_0^{r_0} [p(r) - p(r_0)] d(\pi r^2) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \Phi B_z + \frac{\mu_0}{8\pi} I^2 \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \Phi^{(s)} B_z - \frac{1}{\mu_0} \Phi^{(a)} B_z + \frac{\mu_0}{8\pi} I^2.\end{aligned}$$

Die Messung von $\Phi(z)$ liefert also die über den Querschnitt der Plasmasäule integrierte Differenz $\int \Delta p df$ zwischen dem Druck im Plasma und dem Druck am Plasmarand. $\int \Delta p df$ ist ebenfalls in Abb. 5 aufgetragen. Dabei stellt die strichpunktierte Ge-

rade den Beitrag $\mu_0 I^2/8\pi$ des Bogenstromes I zum Druckaufbau dar. Er ist im frei brennenden Teil nach Abb. 5 klein gegen den der Ringströme, wobei unter diesen, wieder nach Abb. 5, der symmetrische Anteil $j_\varphi^{(0)}$ dominiert. Um dies noch einmal deutlich zu machen, wurde in Abb. 5 auch noch der Verlauf von $\int \Delta p df$ eingetragen, wie er sich ergibt, wenn man den Beitrag $\Phi^{(a)}$ des Hall-Stromes $j_\varphi^{(H)}$ vernachlässigt.

Aus $\int \Delta p df$, dem Leitfähigkeitsradius r_σ und $p(r_\sigma)$ läßt sich der Druck $p(0)$ auf der Achse des Entladungsrohres abschätzen. Im Mittelteil erhält man etwa 1 at, was gut mit direkten Messungen des Druckes von GRASSMANN⁴ übereinstimmt. Aus diesem Wert und der ebenfalls gemessenen und über den Radius konstanten Elektronendichte $n_e = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ läßt sich die EMK $-j_\varphi^{(0)} B_z / e n_e$ abschätzen. Integration dieser EMK von 0 bis r_σ liefert

$$p(r=0)/e n_e = 30 \text{ V}.$$

Eine eingeprägte Spannung gleicher Größe wird bereits von einer Rotationsgeschwindigkeit von 10^5 cm/sec am Rand der Plasmasäule (berechnet unter der Annahme $v_\varphi = \text{const} \cdot r$) bei $B = 50 \text{ kG}$ geliefert. Dieser Wert liegt um eine Größenordnung unter der an den Trichterausgängen gemessenen Geschwindigkeit, d. h. auch in Gebieten, in denen das Plasma wesentlich langsamer rotiert als vor den Trichterausgängen, ist $v_\varphi B_z$ immer noch von gleicher Größenordnung wie $j_\varphi^{(0)} B_z / e n_e$ und damit nach Ungl. (15) groß gegen die Hall-EMK. Deswegen können wir den Stromeinschluß in unserem Experiment fast ausschließlich auf die Rotationsbewegung zurückführen oder – was dasselbe bedeutet – das Plasma als praktisch reibungsfrei betrachten.

Wir wollen dieses Ergebnis noch einmal unter einem anderen Gesichtspunkt betrachten und kombinieren dazu die beiden Ungl. (15) und (16) zu

$$(1/e n_e) |j_\varphi^{(H)} B_z| \ll (1/e n_e) |j_\varphi^{(0)} B_z| \ll |v_\varphi B_z|.$$

Daraus läßt sich folgendes entnehmen: Eine Zunahme der Stromdichte j_r würde sich zuerst im Druckaufbau bemerkbar machen. Selbst wenn $j_\varphi^{(H)}$ in die Größenordnung von $j_\varphi^{(0)}$ kommt, überwiegt immer noch die EMK $v_\varphi B_z$ gegenüber der Hall-EMK, d. h. die Stromdichteverteilung j_m ist dann noch fast die gleiche. Die Druckverteilung ist dagegen eine völlig andere: $j_r < 0$ liefert einen diamagnetischen und damit druckerhöhenden Hall-Strom, $j_r > 0$ führt zu einer Druckerniedrigung. In

der kathodenseitigen Hälfte der Entladung würde also der Druck zunehmen, in der anodenseitigen Hälfte abnehmen. Das gesamte Druckprofil würde merklich unsymmetrisch werden. Es würde dann im Mittelteil eine starke Plasmaströmung in Richtung der Anode einsetzen, die den Charakter der Entladung völlig ändern würde. Das würde schon bei relativ kleinen Werten von j_r eintreten, wie sich zeigt, wenn man den Beitrag $\Delta p^{(H)}$ des Hall-Stromes zum Druck auf der Achse durch $\Delta p^{(H)} = j_\varphi^{(H)} B r$ abschätzt. Nach Gl. (11) können wir dafür auch $\Delta p^{(H)} = \omega_e \tau_e j_r B r$ schreiben. Setzen wir $\Delta p^{(H)} = 1 \text{ at}$, $B = 50 \text{ kG}$, $r = 1,5 \text{ cm}$ und $\omega_e \tau_e = 30$, so finden wir $j_r = 5 \text{ A/cm}^2$. Eine Stromdichte j_r dieser Größenordnung würde den Druckaufbau also schon gravierend beeinflussen. Aus der Tatsache, daß das nicht der Fall ist, folgt zugleich, daß j_r im Experiment um mindestens eine Größenordnung kleiner sein muß. Wenn also Verhältnisse gegeben sind, unter denen die Hall-EMK für den Stromeinschluß wesentlich wird, muß man immer damit rechnen, daß der Hall-Strom $j_\varphi^{(H)}$ auch die Druckverteilung beeinflusst. Der Stromeinschluß durch Rotation hat demgegenüber die Eigenschaft, den Druckaufbau nicht zu beeinträchtigen, wenigstens solange nicht, als die Zentrifugalkraftdichte $-\rho v_\varphi^2/r$ hinreichend klein bleibt. Unter den im Experiment vorliegenden Verhältnissen spielt sie noch keine Rolle.

Die Diskussion der Auswirkungen, die der azimutale Hall-Strom für die Stromdichte j_m und den Druckaufbau haben kann, in unserem Experiment aber nach den Ergebnissen der Messung von $\Phi(z)$ gerade nicht hat, zeigt, daß die Aussage, daß das Plasma als reibungsfrei angesehen werden kann, keineswegs nur von akademischem Interesse ist. Wir wollen im nächsten Abschnitt die bisherigen Aussagen über Stromdichte- und Potentialverteilung in einem reibungsfreien Plasma zusammenfassen und quantitativ behandeln. Zuvor wollen wir aber noch zwei Anmerkungen zu den Ringströmen im Plasma machen. Die erste betrifft den experimentellen Befund, daß in den Trichtern $j_r \neq 0$ ist, wie Abb. 5 zeigt. Das erscheint zunächst unverständlich, da die Trichter ja der ausgezeichneten Flußröhre angepaßt wurden. Bei genauerer Betrachtung der Geometrie des Magnetfeldes und der Trichter findet man jedoch kleine Abweichungen, aus denen sich der Verlauf der Kurve $\Phi^{(a)}(z)$ zwanglos interpretieren läßt. Das wird im Anhang 1 durchgeführt.

Weiterhin wollen wir kurz auf die Stromdichte $j_\varphi^{(0)}$ eingehen, die nach Abb. 5 für den Druckaufbau im frei brennenden Teil der Entladung maßgebend ist. Wie bereits im ersten Abschnitt ausgeführt, geht $j_\varphi^{(0)}$ auf zwei Effekte zurück: die ambipolare Diffusion und einen thermomagnetischen Effekt, den sogen. Nernst-Effekt. Beide Phänomene sind in Gl. (7) nicht enthalten; deren φ -Komponente liefert lediglich $j_\varphi^{(0)} = -v_r B_{z'}$, beschreibt also nur den (vorhandenen aber geringfügigen) Einfluß der Schwerpunktsströmung auf den Druckaufbau. Es wurde bereits früher³ gezeigt, wie Gl. (7) zu erweitern ist, um $j_\varphi^{(0)}$ richtig zu beschreiben. Das ist zwar nicht das Thema dieser Untersuchung; es erhebt sich aber die Frage, ob diese Phänomene auch für Stromdichteverteilung \mathbf{j}_m eine Rolle spielen. Wir haben deshalb im Anhang 2 kurz dargestellt, worin der Näherungscharakter der Gl. (7) besteht. Von daher läßt sich zeigen, daß diese Formulierung des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes eine zur Beschreibung der Stromdichte \mathbf{j}_m ausreichende Näherung darstellt.

5. Quantitative Behandlung der Potentialverteilung und Stromdichte im reibungsfreien Plasma

Die Untersuchungen des vorigen Abschnittes haben gezeigt, daß das Modell des reibungsfreien Plasmas mit vom Spulenfeld bestimmter Stromdichte \mathbf{j}_m auf die experimentell vorliegenden Verhältnisse anwendbar ist. Wir wollen jetzt zeigen, wie sich die Potentialverteilung und die Rotationsgeschwindigkeit in einem solchen Plasma einstellen. In Abschnitt 3 hatten wir bereits die Stromlosigkeitsbedingung

$$E_{r'} + v_\varphi B_{z'} + E_{r'}^* = 0 \quad (10)$$

für die r' -Richtung aufgestellt. Dabei war $E_{r'}$ die durch Gl. (9) definierte Abkürzung für die Summe aller elektromotorischen Kräfte, die nicht von der Stromdichte j_r hervorgerufen werden. Es gibt außerdem noch eine Stromlosigkeitsbedingung für die z' -Richtung, da ja $j_{z'}$ außerhalb der ausgezeichneten Flußröhre verschwindet. Nach Gl. (7) ist

$$(1/\sigma) j_{z'} = E_{z'} + v_r B_\varphi + (1/e n_e) (\nabla p_e)_{z'}. \quad (7 z')$$

In Analogie zu Gl. (9) führen wir

$$E_{z'}^* = v_r B_\varphi + (1/e n_e) (\nabla p_e)_{z'} \quad (17)$$

ein. Bezeichnen wir nun die r' -Koordinate der ausgezeichneten Flußröhre mit r_a' , so muß

$$E_{z'} + E_{z'}^* = 0 \quad \text{für} \quad r' \geq r_a' \quad (18)$$

gelten.

Das elektrische Feld $\mathbf{E}_m = E_{r'} \mathbf{e}_{r'} + E_{z'} \mathbf{e}_{z'}$ wird durch die beiden Stromlosigkeitsbedingungen (10) und (18) und durch die Stationaritätsbedingung $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ festgelegt. Da E_φ wegen Stationarität und Rotationssymmetrie verschwindet, muß auch $\text{rot } \mathbf{E}_m = 0$ gelten. Um die Konsequenzen aller drei Bedingungen übersehen zu können, führen wir die durch

$$\mathbf{j}_m = \lambda \mathbf{B}_m \quad (19)$$

definierte Stromdichtefunktion λ ein. Bildet man die Divergenz der Gl. (9), so erhält man

$$\text{div } \mathbf{j}_m = \lambda \text{ div } \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_m \text{ grad } \lambda.$$

Aus $\text{div } \mathbf{j} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ und der Rotationssymmetrie ($\partial j_\varphi / \partial \varphi = 0$, $\partial B_\varphi / \partial \varphi = 0$) folgt $\text{div } \mathbf{j}_m = 0$, $\text{div } \mathbf{B}_m = 0$, und damit

$$\mathbf{B}_m \text{ grad } \lambda = 0,$$

d. h. λ ist auf jeder magnetischen Flußröhre konstant und somit eine Funktion von r' allein. Bezeichnen wir wieder die r' -Koordinate der ausgezeichneten Flußröhre mit r_a' , so gilt

$$\lambda(r' \geq r_a') = 0.$$

Unter Verwendung des Ansatzes (19) können wir dann Gl. (7 z') auf die Form

$$(\lambda/\sigma) B_{z'} = E_{z'} + E_{z'}^* \quad (20)$$

bringen und die Gln. (10) und (20) in vektorieller Schreibweise zu

$$(\lambda/\sigma) \mathbf{B}_m = \mathbf{E}_m + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B} + \mathbf{E}_m^* \quad (21)$$

zusammenfassen. Aus $\text{rot } \mathbf{E}_m = 0$ folgt dann

$$\text{rot}(v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}_m) = \text{rot}((\lambda/\sigma) \mathbf{B}_m) - \text{rot } \mathbf{E}_m^*. \quad (22)$$

Das ist eine Bedingung für $v_\varphi(r', z')$. Betrachten wir zuerst den Fall $\text{rot } \mathbf{E}_m^* = 0$. Dann schreibt Gl. (22) vor, wie sich die Rotationsgeschwindigkeit einzustellen hat, damit die dem Magnetfeld \mathbf{B}_m folgende Stromdichte \mathbf{j}_m von einem wirbelfreien elektrischen Feld angetrieben werden kann. In v_φ gehen nach Gl. (22) also nur die Geometrie des Magnetfeldes \mathbf{B}_m , der Stromdichteparameter $\lambda(r')$ und die Leitfähigkeit $\sigma(r', z')$ ein, wenn $\text{rot } \mathbf{E}_m^* = 0$ ist. Im allgemeinen wird die Summe aller in \mathbf{E}_m^* zusammengefaßten elektromotorischen Kräfte aber nicht wirbelfrei sein. Dann hat die EMK $v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B}_m$ zusätzlich die Aufgabe, den nicht wirbelfreien Anteil von \mathbf{E}_m^* zu kompensieren, damit $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ erfüllt wird. In unserem Experiment ist aber der wirbelbehaftete Anteil von \mathbf{E}_m^* so klein, daß v_φ praktisch nur durch

$\lambda \mathbf{B}_m / \sigma$ bestimmt wird. Das wurde an anderer Stelle (l. c.¹³) ausführlich gezeigt.

Wir wollen v_φ und \mathbf{E}_m jetzt für einen Spezialfall explizit angeben. Wir betrachten ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}_m = (0, 0, B_z)$, so daß $\mathbf{e}_r' = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_z' = \mathbf{e}_z$ gilt. In diesem Feld befinde sich eine Plasmasäule, deren Zustandsgrößen nicht von z abhängen, die also insofern zylindersymmetrisch ist. Solche Verhältnisse sind im Mittelteil der experimentell untersuchten Entladung in guter Näherung realisiert. Statt von Gl. (22) gehen wir dabei zweckmäßiger von Gl. (21) aus und berücksichtigen $\text{rot } \mathbf{E}_m = 0$ in der üblichen Weise durch $\mathbf{E}_m = -\text{grad } V$. Das liefert

$$-E_r = \partial V / \partial r = v_\varphi B_z + E_r^*, \quad (21 \text{ r})$$

$$-E_z = \partial V / \partial z = -(\lambda / \sigma) B_z. \quad (21 \text{ z})$$

Dabei verschwindet E_z^* wegen der vorausgesetzten Zylindersymmetrie der Zustandsgrößen des Plasmas. Aus diesem Grund sind auch E_r^* und σ Funktionen von r allein. λ hat diese Eigenschaft wegen $\mathbf{B}_m \text{ grad } \lambda = 0$, so daß $E_z = -\partial V / \partial z$ eine Funktion von r allein ist. Integration der Gl. (21 z) liefert deswegen

$$V(r, z) = -z B_z \cdot (\lambda(r) / \sigma(r)) + V_0(r), \quad (23)$$

wo $V_0(r)$ eine Integrationskonstante bezüglich z ist. Differenziert man diese Gleichung nach r , so gilt nach Gl. (21 r)

$$-E_r = \frac{\partial V}{\partial r} = -z B_z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda(r)}{\sigma(r)} \right) + \frac{\partial V_0}{\partial r} = v_\varphi B_z + E_r^*$$

und somit

$$v_\varphi(r, z) = -z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda(r)}{\sigma(r)} \right) - \frac{1}{B_z} \left(E_r^* - \frac{\partial V_0}{\partial r} \right).$$

Die Rotationsgeschwindigkeit $v_\varphi(r, z)$ hängt demnach linear von z ab. Aus Symmetriegründen muß $v_\varphi(z=0)$ verschwinden, so daß $E_r^* = \partial V_0 / \partial r$ und

$$v_\varphi(r, z) = -z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda(r)}{\sigma(r)} \right) \quad (24)$$

gilt. Die einzigen nicht zylindersymmetrischen Größen in der betrachteten Plasmasäule sind also E_r und v_φ . Für den Fall einer Stromdichteverteilung, die durch die Leitfähigkeitsverteilung allein gegeben ist, kommen wir wieder auf völlig zylindersymmetrische Verhältnisse zurück. Dann sind nämlich λ und σ zueinander proportional, so daß v_φ nach Gl. (24) verschwindet. $E_r = -E_r^*$ hängt dann ebenfalls nur von r ab.

Aus den Gln. (23) und (24) erkennt man, daß die r -Abhängigkeiten von v_φ und $E_z = -\partial V / \partial z$ über den Quotienten $\lambda(r) / \sigma(r)$ miteinander gekoppelt sind. λ / σ hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Wir setzen

$$\lambda(r) / \sigma(r) = w_0 f(r) \quad \text{mit } f(0) = 1 \quad f(r_a) = 0,$$

letzteres wegen $\lambda(r_a) = 0$. (r_a ist der Radius der magnetischen Flußröhre, die den Strom einschließt.) Damit ist

$$E_z(r) = w_0 B_z f(r) = E_z(0) f(r), \\ v_\varphi(r, z) = -w_0 z \cdot \partial f / \partial r.$$

$w_0 B_z = E_z(0)$ ist also die Feldstärke auf der Achse im Mittelteil. Setzen wir – entsprechend den im Experiment vorliegenden Verhältnissen – $B_z = 50 \text{ kG}$ und $E_z(0) = 10 \text{ V/cm}$, so ist $w_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ cm/sec}$. Daraus können wir die im Mittelteil maximal auftretende Rotationsgeschwindigkeit abschätzen. Dazu müssen wir eine Annahme über $f(r)$ machen. Setzen wir

$$f(r) = 1 - (r/r_a)^2,$$

so ist v_φ auch in r linear; wir erhalten

$$v_\varphi(r, z) = 2(r z / r_a^2) w_0.$$

Der als Mittelteil bezeichnete Bereich, in dem das Spulenfeld homogen ist, sei $-l/2 \leq z \leq +l/2$. Die dort maximal auftretende Rotationsgeschwindigkeit ist hiermit

$$v_\varphi(r_a, l/2) = (l/r_a) w_0.$$

Die Feldspule in unserer Anordnung ist 60 cm lang; die Länge des homogenen Feldbereiches ist $l = 50 \text{ cm}$. Daraus, sowie aus $r_a = 0,4 \text{ cm}$ und dem obigen Wert von w_0 ergibt sich $v_\varphi(r_a, l/2) = 2,5 \cdot 10^6 \text{ cm/sec}$. Dieser Wert stimmt etwa mit den am Spulenende gemessenen Rotationsgeschwindigkeiten überein.

Um beurteilen zu können, ob das eine gute Übereinstimmung ist, muß man wissen, wie v_φ im Bereich inhomogenen Magnetfeldes von z bzw. z' abhängt. Die Gln. (23) und (24) lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall gekrümmter Magnetfeldlinien und von z' abhängiger Leitfähigkeit erweitern, was an anderer Stelle¹³ durchgeführt wurde. Man kann diesen Beziehungen aber nicht ohne weiteres ansehen, ob $v_\varphi(r', z')$ in der Umgebung der Spulenenden noch über den Wert $v_\varphi(r_a, l/2)$ hinaus anwächst oder nicht. Man müßte dazu die Leitfähigkeitsverteilung $\sigma(r', z')$ in diesem Gebiet einigermaßen genau kennen. Das ist natürlich über die Ausmessung des Temperaturfeldes $T(r', z')$ im Prinzip möglich, aber technisch sehr aufwendig (die Feldspule müßte zahlreiche Beobachtungsschlitze haben) und deshalb bisher nicht durchgeführt worden.

Auf Grund der in diesem Abschnitt durchgeführten quantitativen Untersuchungen können wir sagen, daß das Modell des reibungsfreien Plasmas eine in sich und mit den Meßergebnissen konsistente Beschreibung der Potential- und Stromdichteverteilung liefert. Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, ist die Eigenschaft des experimentell untersuchten Plasmas, sich praktisch reibungsfrei zu verhalten, auch für den Druckaufbau ganz wesentlich. Darüber hinaus werden die Verhältnisse im Plasma auf Grund dieser Eigenschaft sehr übersichtlich. Das wird besonders deutlich, wenn man die Bewegungsgleichung (2) und das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz (7) noch einmal im Zusammenhang betrachtet und auf die führenden Terme reduziert.

Das soll im folgenden durchgeführt werden. Wir beginnen mit dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz. Die r' - und z' -Komponenten lauten:

$$(1/\sigma) j_{r'} = E_{r'} + v_{\varphi} B_{z'} - (\omega_e^2 \tau_e^2) j_{r'} + E_{r'}^*, \quad (7 r')$$

$$(1/\sigma) j_{z'} = E_{z'} + (1/e n_e) j_{r'} B_{\varphi} + E_{z'}^*. \quad (7 z')$$

Da die φ -Komponente der Gl. (7) j_{φ} nur unvollständig beschreibt, wie schon im vorigen Abschnitt gesagt wurde, ersetzen wir sie durch

$$j_{\varphi} = \omega_e \tau_e j_{r'} + j_{\varphi}^{(0)}$$

und erinnern daran, daß $j_{\varphi}^{(0)}$ hauptsächlich durch den Effekt der ambipolaren Diffusion und den Nernst-Effekt bestimmt wird. Wir betrachten weiter die Komponenten der Gl. (2), nämlich

$$\varrho(d\mathbf{v}/dt)_{r'} + (\nabla p)_{r'} = \omega_e \tau_e j_{r'} B_{z'} + j_{\varphi}^{(0)} B_{z'} - j_{z'} B_{\varphi}, \quad (2 r')$$

$$\varrho(d\mathbf{v}/dt)_{z'} + (\nabla p)_{z'} = j_{r'} B_{\varphi}, \quad (2 z')$$

$$\varrho(d\mathbf{v}/dt)_{\varphi} = -j_{r'} B_{z'}. \quad (2 \varphi)$$

Für ein reibendes Plasma tritt $j_{r'} \neq 0$ in allen sechs Gleichungen auf. Somit sind dann Stromdichteverteilung und Druckaufbau gekoppelt. Für ein reibungsfreies Plasma wird diese Kopplung weitgehend aufgehoben: Der Druckaufbau wird durch die Gln. (2 r') und (2 z') bestimmt. Die Stromdichte \mathbf{j}_m liefert zum Druckaufbau für $j_{r'}=0$ nur den Beitrag $-j_{z'} B_{\varphi}$ des Pinch-Effektes in Gl. (2 r'), der jedoch vernachlässigbar ist, wie wir gesehen hatten. Infolgedessen konnten wir den durch $j_{\varphi} = j_{\varphi}^{(0)}$ bestimmten Druckaufbau in vorangegangenen Untersuchungen^{3, 4} behandeln, ohne auf die Stromdichte \mathbf{j}_m näher eingehen zu müssen. Streichen wir in Gl. (2 r') auch den Trägheitsterm, dies mit der im vorigen Abschnitt

angegebenen Begründung, so erhalten wir

$$(\nabla p)_{r'} = j_{\varphi}^{(0)} B_{z'}, \quad (25 r')$$

$$\varrho(d\mathbf{v}/dt)_{z'} + (\nabla p)_{z'} = 0. \quad (25 z')$$

Der Druckanstieg senkrecht zu \mathbf{B}_m wird in dieser Näherung ausschließlich vom symmetrischen Ringstrom $j_{\varphi}^{(0)}$ hervorgerufen. Infolgedessen ist

$$p(r', -z') = p(r', z');$$

die Druckverteilung ist symmetrisch zur Ebene $z'=0$. Der Druckausgleich parallel zu den \mathbf{B}_m -Linien erfolgt durch eine Plasmaströmung, wie wir sie bereits in Abschnitt 1 beschrieben haben: Das aus dem Mittelteil axial nach beiden Seiten abströmende Plasma wird durch einen radialen Zustrom ersetzt. Wegen der symmetrischen Druckverteilung ist auch der Strömungsverlauf zu $z'=0$ symmetrisch: $\mathbf{v}_m(r', -z')$ ist das Spiegelbild von $\mathbf{v}_m(r', z')$. [$v_{r'}(r', -z') = v_{r'}(r', z')$, $v_{z'}(r', -z') = -v_{z'}(r', z')$.]

Die Stromdichte- und Potentialverteilung wird durch die Gln. (7 r') und (7 z') bestimmt. Dabei spielt die EMK $v_{\varphi} B_{z'}$ die zur Kraftdichte $j_{\varphi} B_{z'}$ analoge Rolle. Der Einfluß des Druckaufbaus und der vom Druckaufbau hervorgerufenen Plasmaströmung \mathbf{v}_m auf die Potentialverteilung ist in der pauschalen EMK \mathbf{E}_m^* enthalten, wie die Gln. (9) und (17) zeigen. Wir erwähnten bereits mehrfach, daß die Berücksichtigung von \mathbf{E}_m^* nur geringfügige Beiträge zur Potentialverteilung liefert. Diese ist nach den Gln. (7 r') und (7 z') für $j_{r'}=0$ und $\mathbf{E}_m = -\nabla V$ bei Vernachlässigung von \mathbf{E}_m^* durch

$$(\nabla V)_{r'} = v_{\varphi} B_{z'}, \quad (1/\sigma) j_{z'} + (\nabla V)_{z'} = 0$$

gegeben. Diese beiden Gleichungen sind ganz analog zu den Gln. (25): Der elektrische Strom $\mathbf{j}_m = j_{z'} \mathbf{e}_{z'}$ wird vom Potentialgradienten parallel zu \mathbf{B}_m angetrieben; der Potentialgradient senkrecht zu \mathbf{B}_m wird durch $v_{\varphi} B_{z'}$ balanciert.

Das Symmetrieverhalten von \mathbf{j}_m und V ist dem von \mathbf{v}_m und p entgegengesetzt. \mathbf{j}_m ist spiegelantisymmetrisch zur Ebene $z'=0$, denn $\mathbf{j}_m(r', -z')$ ist das Spiegelbild von $-\mathbf{j}_m(r', z')$. Das Potential ist ebenfalls antisymmetrisch zu $z'=0$, wenn wir seinen Nullpunkt durch $V(r', 0) = 0$ festlegen. Aus $V(r', z') = -V(r', -z')$ folgt nämlich, daß $E_{r'}$ beim Durchgang durch $z=0$ sein Vorzeichen wechselt, was wegen der Vorzeichenumkehr von v_{φ} auch der Fall ist, während $E_{z'}$ sein Vorzeichen beibehält, was wegen $E_{z'} = (1/\sigma) j_{z'}$ ebenfalls zutrifft.

Wir haben somit gefunden, daß der Druckaufbau und der Massenstrom v_m einerseits, die Potentialverteilung und die elektrische Stromdichte j_m andererseits im Fall des reibungsfreien Plasmas weitgehend entkoppelt sind, durch einfache und formal analoge Gleichungen beschrieben werden können und charakteristische Symmetrieeigenschaften haben.

Die Tatsache, daß der Strom nicht den gesamten Querschnitt der leitfähigen Plasmasäule ausfüllt, sondern durch das Magnetfeld auf den wesentlich kleineren Querschnitt der ausgezeichneten Flußröhre konzentriert wird, wirkt sich natürlich auch auf die Aufheizung des Plasmas aus. In einer folgenden Arbeit wird gezeigt, daß dieser Effekt für die Erzielung hoher Temperaturen sehr günstig ist.

Zusammenfassung

Durch ein lineare Bogenentladung im Magnetfeld einer zylindrischen Spule wird ein stationäres Plasma hoher Dichte und Temperatur erzeugt. Im Innenraum der Feldspule brennt das Plasma frei, d. h. der Querschnitt der leitfähigen Plasmasäule ist dort erheblich kleiner als der Querschnitt des Entladungsrohres. Die Untersuchung der Stromverteilung in diesem Bereich der Entladung zeigt, daß diese nicht durch die Leitfähigkeit allein gegeben ist, wie es in einer Plasmasäule ohne überlagertes Magnetfeld der Fall ist. Der Entladungsstrom wird vielmehr vom Magnetfeld in derjenigen Flußröhre festgehalten, deren Querschnitt am Ort der Elektroden gleich dem Elektrodenquerschnitt ist. Im frei brennenden Teil der Entladung hat diese Flußröhre einen wesentlich kleineren Querschnitt als die leitfähige Plasmasäule, d. h. der Strom ist weit stärker auf die Umgebung der Achse konzentriert als in einer Entladung, in der die Leitfähigkeitsverteilung allein für die Stromverteilung maßgebend ist. Der den Stromeinschluß dominierend bestimmende Mechanismus ist die Rotation des Plasmas, die über $v \times B$ in der Stromverteilung entsprechendes elektrisches Feld aufbaut. Die innere Reibung des Plasmas beeinflusst die Rotationsgeschwindigkeit so geringfügig, daß das Plasma praktisch als reibungsfrei angesehen werden kann. Deshalb spielt der Hall-Strom nur eine unbedeutende Rolle für die Stromdichteverteilung in der hier untersuchten Entladung.

Herrn Dr. H. WULFF bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine beständige Unterstützung besonders dankbar. — Diese Arbeit wurde im Max-

Planck-Institut für Physik, München, in der experimentellen Abteilung unter Herrn Dr. G. VON GIERKE begonnen und dann im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik, Garching, und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiet der Plasmaphysik fortgesetzt. Herrn Prof. R. WIENECKE danke ich für sein förderndes Interesse.

Anhang

1. Hall-Ströme in den Trichtern des Entladungsrohres

Die Hall-Ströme in den Trichtern sind darauf zurückzuführen, daß die Trichterwände nicht genau parallel zur ausgezeichneten Flußröhre verlaufen. Im Anodentrichter treten zwei Minima von $\Phi^{(a)}$ auf: an der Anode selbst und am spulenseitigen Ausgang. An diesen Stellen ist $j_r' > 0$. Ebenso ist im Kathodentrichter $j_r' < 0$, wo $\Phi^{(a)}(z)$ Maxima hat.

Das Minimum an der Anode erklärt sich folgendermaßen: Beim Einschalten des Stromes durch die Feldspule werden in den Elektroden Ringströme induziert, die das Eindringen des Spulenfeldes in die Elektrodenringe stark behindern und die bis zum Beginn des Bogenstromimpulses noch nicht merklich abgeklungen sind. Das Spulenfeld wird dadurch in Elektrodennähe stark verzerrt: Die Flußröhren sind dort stärker aufgeweitet als in Abb. 1 angegeben. Würde nun der Bogenstrom schon vor den Elektroden völlig vom hier schwachen Magnetfeld geführt, so würden die von der Anode ausgehenden j_m -Linien stark zur Achse hin gebündelt. Tatsächlich fließt aber ein Teil des Stromes parallel zu den Trichterwänden, durchsetzt also die gegenüber dem Trichter aufgeweiteten B_m -Linien so, daß eine Stromdichtekomponente $j_r' > 0$ auftritt. Mit wachsendem Abstand von den Elektroden nimmt die Verzerrung des Spulenfeldes und damit j_r' ab und nach Durchlaufen einer Nullstelle (genauer: eines sehr schwachen Maximums) wieder zu. In diesem Gebiet sind, wie Abb. 1 und noch deutlicher Abb. 3 zeigt, die Trichter nicht genau an die ausgezeichnete Flußröhre angepaßt, sondern ihr gegenüber geringfügig erweitert. Der Verlauf der Trichterwände läßt dort also zu, daß der Bogenstrom die ausgezeichnete Flußröhre nach außen durchsetzt, also den gesamten Trichterquerschnitt ausfüllt. Höchst bemerkenswert ist dabei, daß das zweite Minimum von $\Phi^{(a)}$ noch innerhalb des Anodentrichters liegt, und daß $\Phi^{(a)}$ am Trichterausgang schon fast 0 geworden ist. Dieser Befund erscheint auf den ersten Blick paradox, denn sobald der Bogenstrom den Trichter verlassen hat, steht ja einer weiteren Ausdehnung seines Querschnitts keine Wand mehr entgegen. Daß der Bogenstrom gerade im frei brennenden Teil der Entladung sich nicht

weiter über die Feldlinien ausdehnt, ist offensichtlich nur auf Grund der Überlegungen im Abschnitt 3 zu verstehen: Der Trichter beeinträchtigt die Rotationsbewegung infolge der Reibung des Plasmas an der Trichterwand viel stärker als das weite zylindrische Rohr im frei brennenden Teil der Entladung. Als ausgezeichnete, d. h. den gesamten Bogenstrom enthaltende magnetische Flußröhre ist somit eigentlich die anzusehen, die tangential zum Innenrand der Trichterausgänge verläuft. Sie hat nach Abb. 3 einen etwas größeren Querschnitt als die den Elektrodenradius tangierende Flußröhre. In praxi ist der Unterschied aber bedeutungslos.

2. Ergänzende Bemerkungen zum verallgemeinerten Ohmschen Gesetz

Beim Übergang von Gl. (6) zu Gl. (7) hatten wir $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{j}/e n_e$ gesetzt. Das gilt für ein Zwei-Komponenten-Plasma, das aus Elektronen und nur einer Sorte Ionen besteht. Ist noch eine dritte Komponente vorhanden, seien es Neutralatome oder Ionen einer anderen Ionisationsstufe, gelten die Gln. (5) natürlich nicht mehr und deswegen auch nicht mehr $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{j}/e n_e$. Zur Beschreibung der Relativbewegung der Komponenten muß außer $-\mathbf{j}/e n_e$ noch eine weitere Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{d} definiert werden, womit dann $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{j}/e n_e + \mathbf{d}$ gilt.

Weiterhin hatten wir beim Übergang von Gl. (6) zu Gl. (7) angenommen, daß die zwischen Elektronen- und Ionengas wirkende Reibungskraftdichte \mathbf{R}_{ei} zu $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$ proportional sei. Diese Annahme stellt in zweierlei Hinsicht eine Vereinfachung dar: Erstens liefert auch der Temperaturgradient eine Rei-

bungskraft zwischen beiden Teilchensorten, so daß $\mathbf{R}_{ei} = \alpha(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) + \beta(\nabla T)$ gilt. Zweitens sind α und β Tensoren, d. h. beide Beiträge zu \mathbf{R}_{ei} stehen schief zu den Richtungen von $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$ bzw. ∇T . Berücksichtigt man dies, so findet man³: 1. Die Leitfähigkeit ist anisotrop. 2. Es existiert eine Reibungskraft in Richtung von $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Diese liefert aber für $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ nur eine kleine Korrektur zur Hall-EMK $-\mathbf{j} \times \mathbf{B}/e n_e$. 3. Der Term $-\beta \nabla T/e n_e$ tritt im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz als zusätzliche EMK in Erscheinung. Dabei stellt der zu $\nabla T \times \mathbf{B}$ proportionale Anteil dieser EMK den sogen. Nernst-Effekt dar.

Für die φ -Komponente des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes sind gerade die von der ambipolaren Diffusion herrührende EMK $-d_r' B_z'$ und die zu $(\nabla T)_r' B_z'$ proportionale Nernst-EMK von ausschlaggebender Bedeutung. Sie bestimmen dominierend den Druckaufbau. In der Meridionalebene sind die Terme $\mathbf{d} \times \mathbf{B}$ und $-\beta \nabla T/e n_e$ ohne Einfluß auf die Stromdichteverteilung, sie sind also der durch die Gln. (9) und (19) definierten EMK \mathbf{E}_m^* zuzuschlagen, ändern aber deren Größenordnung nicht. Deswegen ist die vereinfachte Zwei-Flüssigkeits-Näherung zur Beschreibung der Stromdichte \mathbf{j}_m völlig ausreichend. Auch die Anisotropie der Leitfähigkeit spielt praktisch keine Rolle, denn selbst für $\omega_e^2 \tau_e^2 \gg 1$ unterscheiden sich die Leitfähigkeiten parallel und senkrecht zu \mathbf{B} nur um einen Faktor 2.

Die Begründung für die Anwendbarkeit der Gl. (7) auf die Stromdichteverteilung \mathbf{j}_m konnte hier nur skizziert werden. Sie wurde an anderer Stelle¹³ detaillierter durchgeführt.